Tutorium Math 2/3 für BMC 5.11.26

Faltungsintegral und „2. Sinn" der Laplacetransformation

$$(f_1 * f_2)(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau)\, d\tau = F_1(s) \cdot F_2(s)$$

($*$: ↑ Faltung)

d.h. in Worten: Die Faltung zweier Zeitfunktionen = Produkt ihrer Laplacetransformierten

Beispiel t wird mit sich selbst gefaltet

$$t * t = \int_0^t \tau(t-\tau)\, d\tau = \int_0^t \tau \cdot t - \tau^2\, d\tau$$

$$= \frac{1}{2}\tau^2 \cdot t - \frac{1}{3}\tau^3 \Big|_0^t = \frac{1}{2}t^3 - \frac{1}{3}t^3 = \frac{1}{6}t^3 \Longrightarrow$$

$\Longrightarrow$

Benutzen wir vorherige Behauptung (mit Tabelle) können wir folgern $(f_1 * f_2)(t) = F_1(s) \cdot F_2(s) = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^4}$

wir finden in der Tabelle $\frac{1}{(s-a)^{n+1}} \circ\!\!-\!\!\circ \frac{t^n}{n!} \cdot e^{at}$ Rücktrafo $\Rightarrow$

$a=0$ ↑ $n+1 = 4 \Rightarrow n=3$

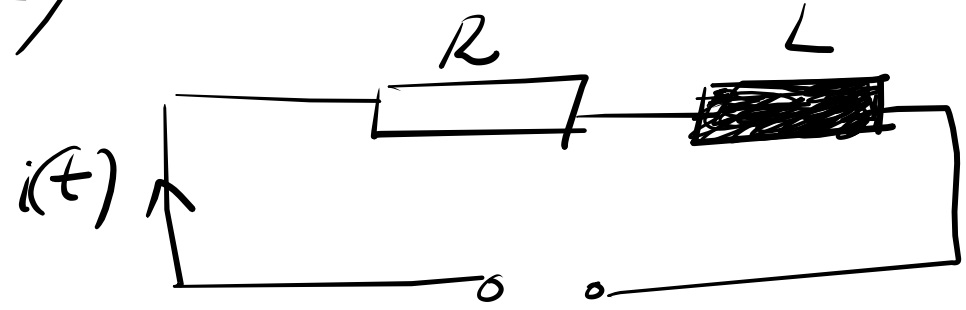
$\Rightarrow f(t) = \frac{t^3}{3!} \cdot 1 = \frac{t^3}{6}$

Anwendung der Laplace-Trafo

RL Stromkreis mit linear ansteigender äußerer Spannung

Widerstand R Induktivität L Spannung $u = k \cdot t$ $(k > 0)$

Bestimmen Sie $i = i(t)$



mit $i(0) = 0$

Es gilt $\underbrace{L \cdot \frac{di}{dt}}_{u_1} + \underbrace{R \cdot i}_{u_2} = u$

$$\frac{di}{dt} + \frac{R}{L} \cdot i = \frac{u}{L} = \frac{k}{L} \cdot t \quad \text{oder} \quad \frac{di}{dt} + \alpha \cdot i = \beta \cdot t$$

$$\left[s \cdot I(s) - i(0) \right] + \alpha \cdot I(s) = \mathcal{L}\{\beta \cdot t\} = \beta \cdot \mathcal{L}(t) = \beta \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow \quad s \cdot I(s) + \alpha \cdot I(s) = (s+\alpha) \cdot I(s) = \beta \cdot \frac{1}{s^2}$$

$$\Rightarrow I(s) = \beta \cdot \frac{1}{(s+\alpha) \cdot s^2} \Rightarrow \text{Rücktransformation} \Rightarrow$$

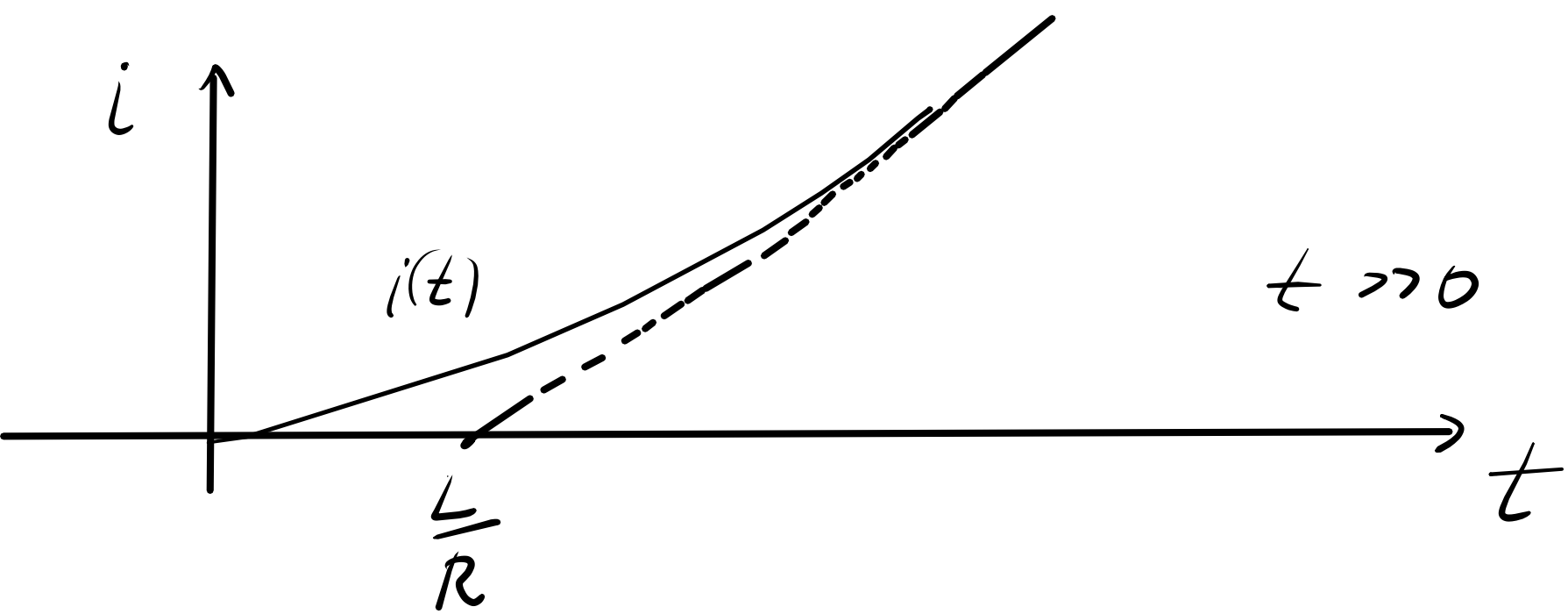
$$i(t) = \mathcal{L}^{-1}\{I(s)\} = \mathcal{L}^{-1}\left\{\beta \cdot \frac{1}{(s+\alpha) \cdot s^2}\right\} = \beta \cdot \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+\alpha)s^2}\right\}$$

$$= \beta \cdot \frac{e^{-\alpha t} + \alpha t - 1}{\alpha^2} = \frac{\kappa}{L} \cdot \frac{e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{R}{L} \cdot t - 1}{\frac{R^2}{L^2}} \quad ; \quad a = -\alpha$$

$$= \frac{\kappa \cdot L}{R^2}\left(e^{-\frac{R}{L} \cdot t} + \frac{R}{L} \cdot t - 1\right) \; ; \; t \geq 0$$

Grenzwertbetrachtung

$\Rightarrow$ mit $\underbrace{\text{Zeit}}_{t \gg 0}$ verschwindet $e^{-\frac{R}{L} \cdot t}$ und es wird ein linearer Verlauf $i(t)$


i
i(t)
t >> 0
t
L/R