

Tutorium Math. f. BMC 2, 25.3.26

Wiederholung partielle Ableitung, benötigt für Gradienten, Divergenz, Rotation, Fehlerrechnung, Extremwerte von $f(x,y)$, Tangentialebene, u.a.

$$W = \frac{1}{2} m \cdot v^2 \Rightarrow \Delta W = \frac{1}{2} \cdot \Delta v \cdot \Delta m$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} \approx \frac{df}{dx} \approx f'$$

$$dW = \frac{1}{2} dv \cdot dm$$

a) $f(x,y) = x^2 \cdot y$ $f_x \hat{=} \frac{\partial f}{\partial x} = \underline{\text{const.}} \Rightarrow f_x: x^2 \cdot a \Rightarrow 2x \cdot a$

b) $f(x,y) = x^2 \cdot y + y^3 \Rightarrow f_x = 2xy$ wenn $a = y$ $= 2xy$

$$f(x, y) = x^2 \cdot y \quad \underline{f_x = 2xy} \quad f_y = x^2$$

für Extremwerte braucht man noch f_{xx} , f_{xy} , f_{yy}

$$f_{xx} = 2y \quad f_{xy} = \underline{\underline{2x}} \quad f_{yy} = 0$$

↑
Satz von Schwarz $f_{xy} = f_{yx}$

$$f_y = x^2 \quad \frac{\partial}{\partial x} = \underline{\underline{2x}} \stackrel{!}{=} f_{yx}$$

benötigt \Rightarrow
wird

Hesse Matrix

$$=: \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

$$\xRightarrow{\text{Det}} \left(D = f_{xx} \cdot f_{yy} - \overbrace{f_{xy} \cdot f_{yx}}^{f_{xy}^2} \right)$$

"Formel"

$f(x,y) = e^{xy^2}$ alle 5 1. und 2. Abl.

$$f_x = e^{xy^2} \cdot y^2 \quad f_y = e^{xy^2} \cdot 2xy \quad (u \cdot v)' = u'v + uv'$$

$$f_{xx} = y^2 \cdot e^{xy^2} \cdot y^2 \quad f_{yy} = e^{xy^2} \cdot 2xy \cdot 2xy + e^{xy^2} \cdot 2x$$

$$f_{xy} = f_{yx} = e^{xy^2} \cdot 2xy \cdot y^2 + e^{xy^2} \cdot 2y$$

überprüfen auf Extremwerte Max, Min, Sattel

$$f(x,y) = x^2 + y^2 + xy - 2x + 3y + 7$$

$$f_x = 2x + y - 2 = 0; f_y = 2y + x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow y = 2 - 2x \quad \xrightarrow{\text{ans.}} \quad 2 \cdot (2 - 2x) + x + 3 = 0 \quad \Rightarrow x = \underline{\underline{\frac{7}{3}}}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y = -\frac{8}{3}}} \quad P = \left(\frac{7}{3}; -\frac{8}{3} \right) \quad \text{Krit. Punkt}$$

$$f_{xx} = 2$$

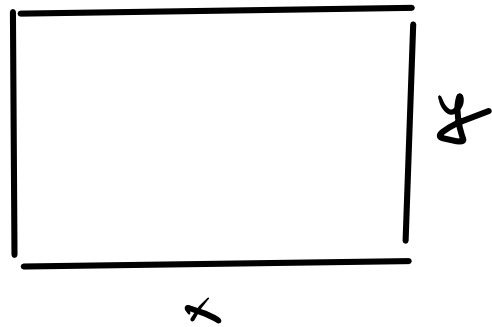
$$f_{yy} = 2$$

$$f_{xy} = 1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \det \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \underline{\underline{3}} > 0 \quad \Rightarrow \text{ist Extremwert} \Rightarrow f_{xx} = 2 > 0$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\text{min}}}$$

Beispiel Optimierung



$$\Rightarrow H = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -4 < 0$$

\Rightarrow Max

$$u = 2x + 2y$$

$$x = \frac{u - 2y}{2} \quad y = \frac{u - 2x}{2}$$

$$A = x \cdot y = \left(\frac{u - 2y}{2} \right) \cdot \left(\frac{u - 2x}{2} \right)$$

$$A_x = \left(\frac{u - 2y}{2} \right) \cdot \frac{-2}{2} = 0$$

$$A_y = \left(\frac{u - 2x}{2} \right) \cdot \frac{-2}{2} = 0$$

$$(-1) \quad \frac{u - 2y}{2} = 0 \Rightarrow u - 2y = 0$$

$$\frac{u - 2x}{2} = 0 \Rightarrow u - 2x = 0 \Rightarrow 2y = 2x \Rightarrow x = y = \text{Quadrat}$$

SS 19 $f(x, y) = 4xy - x^2 - 1 + 2y - 5y^2$ (Extrem./Sattel)

$$f_x = 4y - 2x \quad f_y = 4x + 2 - 10y = 0 \Rightarrow \text{krit. Pkt.} \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases}$$

$$f_{xx} = -2 \quad f_{yy} = -10 \quad f_{xy} = 4$$

$$\det H = \begin{vmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -10 \end{vmatrix} = 4 > 0 \quad \text{Extrem.}$$

$$f_{xx} < 0 \Rightarrow \text{Max!}$$

$$f(x, y) = (x + 1)(x^2 + 5x - 5 + y^2) \text{ am besten ausmultiplizieren}$$

$$f(x, y) = x^3 + 6x^2 + xy^2 + y^2 - 5$$

$$f_x = 3x^2 + 12x + y^2 = 0 \quad f_y = 2xy + 2y = 0$$

$$\Rightarrow y=0 \quad \begin{matrix} \uparrow \\ \Rightarrow \end{matrix} 3x^2 + 12x = 0 \quad \Rightarrow 3x(x+4) = 0$$

$$\Rightarrow x = -1$$

$$\Rightarrow x=0 \vee x=-4$$

$$\Rightarrow f_{xx} = 6x + 12; \quad f_{xy} = 2y; \quad f_{yy} = 2x + 2$$

$$|H| = \begin{vmatrix} 6x+12 & 2y \\ 2y & 2x+2 \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} \text{verwende} \\ \Rightarrow \\ \text{krit. Pkte.} \end{matrix}$$

$$1) \quad \begin{matrix} x=0 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 24 > 0$$

$$f_{xx} > 0 \Rightarrow \text{Min.}$$

$$2) \quad \begin{matrix} x=-4 \\ y=0 \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} -12 & 0 \\ 0 & -6 \end{vmatrix} = 72 > 0$$

$$f_{xx} < 0 \Rightarrow \text{Max.}$$

mit $x = -1$ in f_x

$$\Rightarrow 3 - 12 + y^2 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{y = \pm 3}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y = +3 &\Rightarrow \begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0 \\ y = -3 &\Rightarrow \begin{vmatrix} 6 & -6 \\ -6 & 0 \end{vmatrix} = -36 < 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{vmatrix} 6 & 6 \\ 6 & 0 \end{vmatrix}} \right\} \text{Sattel}$$