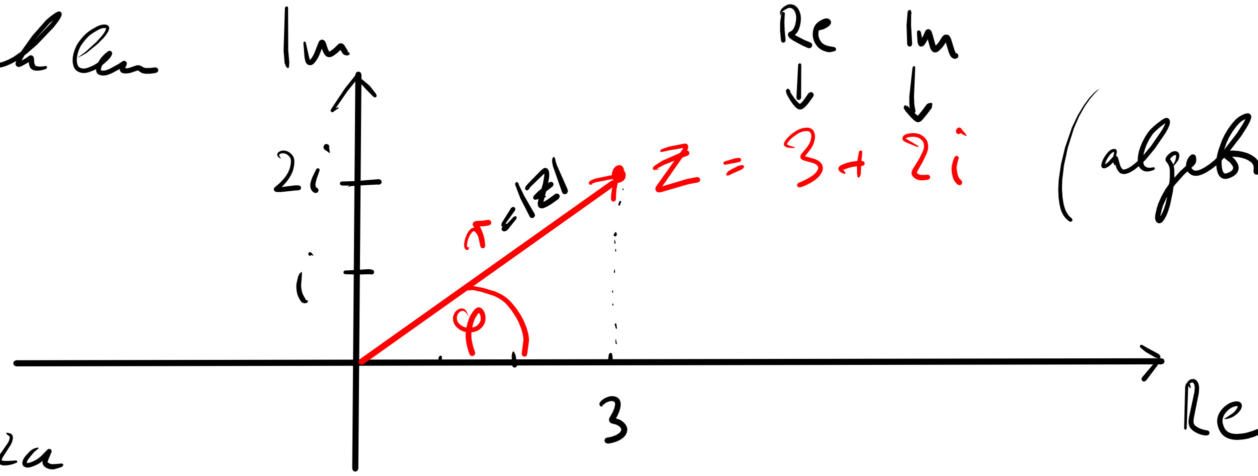
Tutorium M1 für BMC1 30.10.25

– Komplexe Zahlen

$\varphi \mathrel{\hat{=}}$ Phi



(algebraische Darstellung)

Achtung! $\underline{\mathrm{Im}\, z = 2}$

„zweidimensional" zu rechnen erleichtert die Arbeit in der Elektrotechnik.

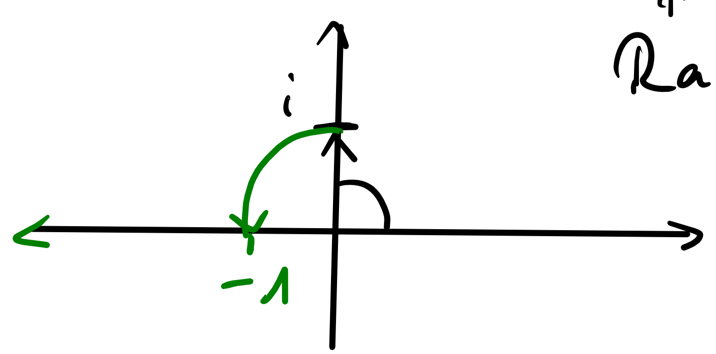
Man erspart sich das mühsame Rechnen mit Additionstheoremen etc.

Es gilt noch $r \cdot (\cos(\varphi) + i \sin(\varphi)) \equiv r \cdot e^{i\varphi}$

$\underline{\varphi \text{ in}}$ Bogenmaß $\Longrightarrow 360° \mathrel{\hat{=}} 2\pi$ (rad) $= 6{,}28$

Radiant

Warum ist $i^2 = -1$



$|z| = 1$

$\varphi = \frac{\pi}{2}$ $\Longrightarrow (1)^2 \underbrace{\left(e^{i \cdot \frac{\pi}{2}}\right)}_{= i}{}^2 = 1 \cdot e^{i \cdot \overset{180°}{\pi}}$

Berechnen Sie bitte: $\left(\underbrace{i^2}_{-1}+1\right)^{20} = 0$

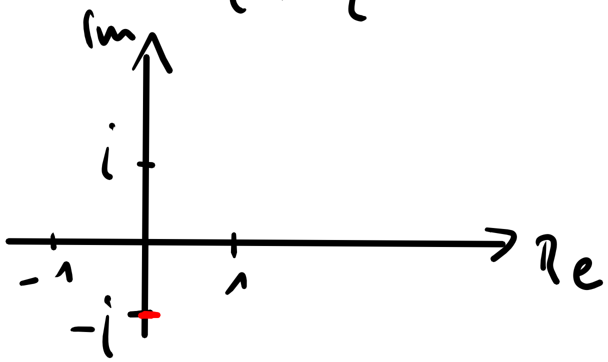
Grundregel

$$\boxed{i^2 = -1}$$

$$z = i^{-25} = \frac{1}{i^{25}} = \frac{1}{i \cdot i^{24}} = \frac{1}{i\,\left(\underbrace{i^2}_{(-1)}\right)^{12}} = \frac{1}{i}\,\frac{-i}{-i}$$

$$(-1)^{12} = 1 \qquad -(-1) = 1$$

$$= \frac{-i}{1} = \underline{\underline{-i}}$$



$$z = i^{231} = i \cdot i^{230} = i \cdot (i^2)^{115} = i(-1) = \underline{\underline{-i}}$$

$$|z|^2 = z \cdot \bar{z}$$

Beispiel: $z = 2+i$ $\quad \bar{z} = 2-i$

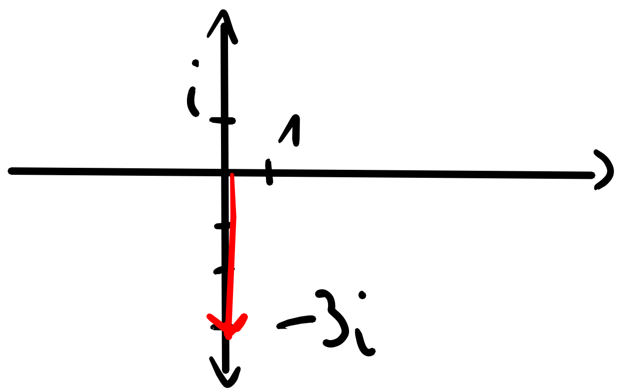
konjugiert komplex

$$|z|^2 = (2+i)(2-i) = 4 - \cancel{2i} + \cancel{2i} + 1 = 5$$

$$|z| = \sqrt{5}$$

Bitte vereinfachen: $z = \frac{1}{i} + i^3 + \frac{1}{i^5} = \frac{1}{i} - i + \frac{1}{i \cdot \underbrace{i^2}_{-1} \cdot \underbrace{i^2}_{-1}}$

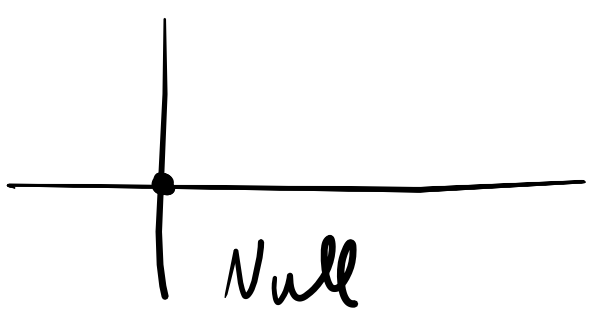
$$= \frac{1}{i} - i + \frac{1}{i} = \frac{2}{i} - i = \frac{2(-i)}{\underbrace{i(-i)}_{1}} - i = -2i - i = \underline{\underline{-3i}}$$



Bitte vereinfachen und skizzieren: $i^{30} + i^{12} + i^5 + i^3 =$

$$(i^2)^{15} + (i^2)^6 + i(i^2)^2 + i(i)^2$$

$$-1 + 1 + i - i = \underline{\underline{0}}$$



Beim Reifenwechsel zeigt der Hebel des Werkzeugs nach $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{matrix} x \\ y \\ z \end{matrix}$

die Kraft greift an, $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ an

a) welcher Winkel liegt zwischen den beiden (Skalarprodukt)

b) welches Drehmoment wirkt wenn $|\vec{M}| = |\vec{F} \times \vec{e}|$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \underline{\cos(\alpha)}$$

$$|\vec{a}| = \sqrt{1^2 + 3^2 + 2^2} = \sqrt{14}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + 0^2 + 1^2} = \sqrt{2}$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = -1 + 0 + 2 \underline{\underline{= 1}}$$

$$\Rightarrow \cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} = \frac{1}{\sqrt{28}} \approx 0{,}189$$

$$\Rightarrow \alpha = 79{,}1^\circ$$

b) $\vec{F} \times \vec{e}$ $\quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}}_{\vec{M}}$ $\quad |\vec{M}| = \sqrt{9+9+9} = \sqrt{27}$ [Nm]

Berechnen Sie für $z_1 = 3+4i \qquad \bar{z}_1 = 3-4i$

$z_2 = 5-i \qquad \bar{z}_2 = 5+i$

$z_3 = 0{,}2+0{,}5i \qquad \bar{z}_3 = 0{,}2-0{,}5i$

a) $z_1 + \bar{z}_2 \Rightarrow 3+4i+5+i = \underline{\underline{8+5i}}$

b) $\dfrac{z_1+z_2}{z_3} \Rightarrow \dfrac{3+4i+5-i}{0{,}2+0{,}5i} = \dfrac{(8+3i)}{(0{,}2+0{,}5i)} \cdot \dfrac{(0{,}2-0{,}5i)}{(0{,}2-0{,}5i)} = \dfrac{1{,}6-4i+0{,}6i+1{,}5}{0{,}2^2+0{,}5^2}$

$= \dfrac{3{,}1-3{,}4i}{0{,}04+0{,}25} = \underline{\underline{\dfrac{3{,}1-3{,}4i}{0{,}29}}};$