Tutorium M1 f. BMC 13.11.25

Inverse Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1}$$ Prüfe ob Det $\neq 0$

Methode 1

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 5 & 0 & 1 \end{array}\right) -2\,\mathrm{I}. \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right) -2 \cdot \mathrm{II}. \quad \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right)$$

A^{-1}

Probe ob $A \cdot A^{-1} = E$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \cdot 1 - 2 \cdot 2 & -2+2 \\ 5 \cdot 2 - 2 \cdot 5 & -4+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \checkmark$$

Methode 2 über die sogenannte Adjunkte

Formel

Wenn $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

$\Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \to A^{-1} =$

$\operatorname{Det} A = 1 \cdot 5 - 2 \cdot 2 = \underline{\underline{1}}$ Einsetzen $\underline{\underline{\frac{1}{1} \cdot \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}}$

$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Longrightarrow A^{-1}$ mit $A \cdot A^{-1} = E$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) + 2\,\mathrm{II}. \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) + 2 \cdot \mathrm{II}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & 0 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} -3\cdot III \\ \\ \\ \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -3 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +III. \\ \\ \end{array} \Rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 4 & -3 & 0 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} -4\cdot II. \\ \\ \\ \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & -3 & -4 & 1 & -9 & -7 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & -4 & 1 & -9 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ +4\cdot III \\ \\ \end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)\begin{array}{l} \\ \\ -II. \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right)\begin{array}{l} -III \\ \\ \\ \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -5 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 6 & 4 \end{array}\right) \; A^{-1}$$

Gegeben ist das LGS:

$$\begin{array}{ccccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & \vec{b} \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 2 & 6 \end{array} \quad \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ -2\cdot\mathrm{III} \end{array} \implies \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 2 & 6 & 0 & 6 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\mathrm{II}. \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \implies \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\mathrm{I} \\ \\ \\ \end{array} \implies \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Stufen var.

$\neq 0$ $\neq 0$

$\implies$ LGS $\implies$

$$x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 3$$
$$2x_3 + x_4 + x_5 = 0$$

$\implies \infty$ viele Lösungen

(Pivotspalten) Stufenvariable

weltweite Einigung: x_1, x_3 nicht frei wählbar $\implies$

$\Rightarrow$ partikuläre Lösung wenn man alle frei wählbaren Variablen auf Null setzt: d.h. $x_2 = x_4 = x_5 = 0$!

$\Rightarrow$ x_1 und x_3 ausrechnen.

es war $x_1 + \cancel{2 \cdot x_2} + \cancel{x_3} + \underbrace{\cancel{3 \cdot x_4}}^{=0} = 3 \Rightarrow \underline{x_1 = 3}$

$2x_3 + \cancel{x_4} + \cancel{x_5} = 0 \Rightarrow \underline{x_3 = 0}$

$\Rightarrow x_p = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

(part.)

$\Rightarrow$ allgemeine homogene Lösung

$\Rightarrow$ $x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 = 0$

$2x_3 + x_4 + x_5 = 0$

Eine frei wählbare auf 1 setzen aber für alle 3

$$\Rightarrow \quad x_2 = 1 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 0 \quad x_3 = 0 \quad x_1 = -2$$

$$x_2 = 0 \quad x_4 = 1 \quad x_5 = 0 \quad x_3 = -\frac{1}{2} \quad x_1 = -\frac{5}{2}$$

$$x_2 = 0 \quad x_4 = 0 \quad x_5 = 1 \quad x_3 = -\frac{1}{2} \quad x_1 = \frac{3}{2}$$

$\Rightarrow$ Lösungsgesamtheit:
$$\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_1 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_3 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$

Reelle Zahl

Willkür!

$$\text{Sei } A = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 & -3 \\ 0 & -7 & 3 & 1 \end{pmatrix} \end{array} \begin{array}{l} -\overline{\underline{III}} \\ \\ \\ \\ \end{array} \qquad \vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$$

LGS lösen

x_p . . . .

Hörsaal 5.1.03

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -5 & 3 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} +\underline{II} \\ \\ \\ \\ \end{array} \Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -7 & 3 & 1 & -3 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ -\overline{\underline{II}} \end{array}$$

Mittwoch 11:45

$$\Longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -4 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -3 \\ 1 & 3 & 0 & -3 & 1 \\ 0 & -8 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right) \; \begin{array}{l} \\ \\ \dots \\ \dots \end{array}$$

$\Longrightarrow$ 3 Gleichungen mit 4 Unbekannten

$\Longrightarrow x_1, x_2, x_3$ = Stufenvariable

x_4 frei wählbar