Tut. M 1/2 23.4.26 BMC

$y' = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

$\frac{y}{x} = u(x) \Rightarrow y = x \cdot u(x)$ (Produktregel)

$y' = \frac{1}{u(x)} + u(x)$

$\Rightarrow y' = u(x) + x\, u'(x)$

$\Rightarrow \cancel{u} + x \cdot u' = \frac{1}{u} + \cancel{u} \Rightarrow x \cdot \frac{du}{dx} = \frac{1}{u} \Rightarrow \int u \cdot du = \int \frac{1}{x} \cdot dx \Rightarrow$

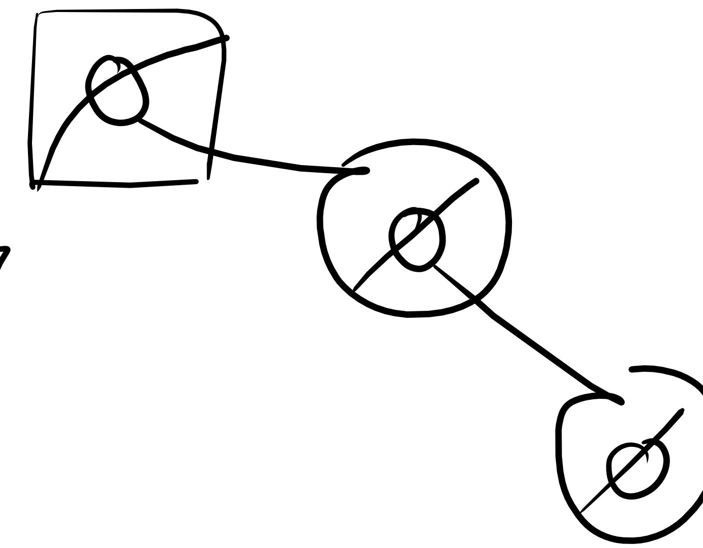
$\Rightarrow \frac{1}{2} u^2 = \ln(x) + c \xRightarrow{\text{rücks.}} \frac{1}{2} \frac{y^2}{x^2} = \ln(x) + c$

$\Rightarrow y^2 = 2x^2 \cdot (\ln(x) + c) \Rightarrow y = x \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{\ln(x) + c}$

Doppelintegrale

$$\iint (x+y)\,dx\cdot dy \quad \text{mit} \quad 0<x<1\ ;\ \underline{\underline{\overbrace{0<y<x}^{\text{anfangen}}}} \quad \text{1. Integr.}$$

$$\int_0^1\int_0^x (x+y)\,dy\cdot dx \Rightarrow \int_0^1 dx \int_0^x (x+y)\,dy$$



$$\Rightarrow \int_0^1 dx \left[x\cdot y + \frac{1}{2}y^2\right]_0^x = \int_0^1 dx \left[\underbrace{x\cdot x}_{x^2} + \frac{1}{2}x^2 - 0 - 0\right]$$

$$\Rightarrow \int_0^1 \frac{3}{2}x^2\,dx = \frac{\cancel{3}}{2}\cdot\frac{1}{\cancel{3}}x^3\Big|_0^1 = \frac{1}{2}\cdot 1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \quad \text{Vol. E.}$$

$$\int_0^x\int_0^1 (x+y)\,dx\,dy \Rightarrow \int_0^x dy \int_0^1 (x+y)\,dx \Rightarrow \int_0^x dy \left[\frac{1}{2}x^2 + y\cdot x\right]_0^1$$

o.G.
− u.G

$$\Rightarrow \int_0^x dy \cdot \left(\frac{1}{2} + y\right) dy = \left[\frac{1}{2}y + \frac{1}{2}y^2\right]_0^x = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}x^2$$

??

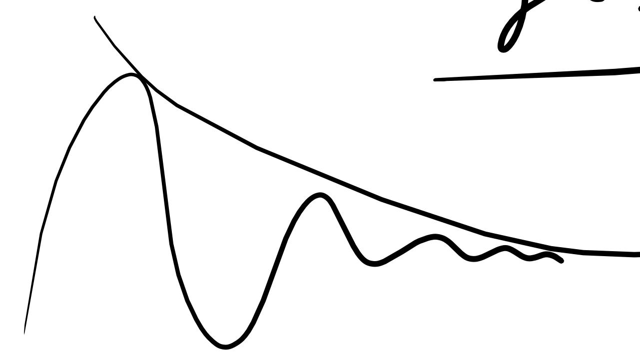
Wenn beide Integrale feste Grenzen haben $\Rightarrow$ Reihenfolge egal!

DGL 2. Ordnung.
homogen

Beschl

Weg

$$y'' + 4\cdot y' + 5y = 0$$



Man nimmt den Ansatz: $y(x) = e^{\lambda x}$ λ: Lambda

bei konstanten Koeffizienten

bei $y'' \hat{=} 1$ $y \hat{=} 5$ $\Longrightarrow (e^{\lambda \cdot x})'' + 4 \cdot (e^{\lambda x})' + 5 \cdot (e^{\lambda \cdot x}) = 0$

$y' \hat{=} 4$

$$e^{\lambda x} \xrightarrow{\text{1. Abl.}} e^{\lambda \cdot x} \cdot \lambda = \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} \xrightarrow{\text{2. Abl.}} \lambda \cdot e^{\lambda x} \cdot \lambda = \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

$$\rightarrow \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot x} + 4 \cdot \lambda \cdot e^{\lambda \cdot x} + 5 \cdot e^{\lambda \cdot x} = 0 \quad \Big| : e^{\lambda \cdot x}$$

$\overset{a}{1} \cdot \lambda^2 + \overset{b}{4} \cdot \lambda + \overset{c}{5} = 0$ charakteristisches Polynom λ. gesucht

$\Longrightarrow$ Mitternachtsformel

$$\lambda_{1/2} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 20}}{2} = \frac{-4 \pm \sqrt{-4}}{2} \nearrow \frac{-4 + \sqrt{i^2 \cdot 4}}{2} \quad \searrow \frac{-4 - \sqrt{i^2 \cdot 4}}{2}$$

mit $i^2 = -1$

$\lambda_1 = -2 + i$

$\lambda_2 = -2 - i$

$$y_h = e^{\sigma x}\left[c_1 \cdot \cos(\omega x) + c_2 \cdot \sin(\omega x)\right]$$

$$\lambda_1, \lambda_2 = \sigma \pm i\omega$$

$-2+i$

$-2-i$ $\Rightarrow \sigma = -2 \quad \omega = 1$

σ = Sigma klein

Σ = Sigma groß

$$\Rightarrow y_h = e^{-2x} \cdot \left[c_1 \cdot \cos(x) + c_2 \cdot \sin(x)\right]$$

$$y'' + y = 0$$

$$y(x) = e^{\lambda \cdot x} \xrightarrow{1.\ \text{Abl.}} \lambda \cdot e^{\lambda x} \xrightarrow{2.\ \text{Abl.}} \lambda^2 \cdot e^{\lambda x}$$

$$\Rightarrow \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot x} + e^{\lambda \cdot x} = 0 \quad | : e^{\lambda x}$$

$$\lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \lambda_{1/2} = \pm\sqrt{-1} = \underline{\underline{\pm i}}$$

$\omega = 1 \quad \sigma = 0$

$$\Rightarrow y_h = \underbrace{e^0}_{=1} \cdot \left[c_1 \cos(x) + c_2 \cdot \sin(x)\right]$$

Dämpfung fehlt!

$$y'' + 2y' - 3y = 0 \qquad y = e^{\lambda x}$$

$$y' = \lambda \cdot e^{\lambda x} \qquad y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot x}$$

$$\Rightarrow 1 \cdot \lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+12}}{2} = \begin{cases} \nearrow \frac{-2+4}{2} = \underline{\underline{1}} \\ \searrow \frac{-2-4}{2} = \underline{\underline{-3}} \end{cases}$$

2 reelle unterschiedl. λ

$$\underline{\underline{y_h = c_1 \cdot e^{1 \cdot x} + c_2 \cdot e^{-3x}}}$$

$$y_h' = c_1 \cdot e^{x} - 3 \cdot c_2 \cdot e^{-3x}$$

$$y_h'' = c_1 \cdot e^{x} + 9 c_2 \cdot e^{-3x}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cancel{c_1 \cdot e^{x}} + \cancel{9 c_2 \cdot e^{-3x}}}_{y''} + \underbrace{\cancel{2 \cdot c_1 \cdot e^{x}} - \cancel{6 \cdot c_2 \cdot e^{-3x}}}_{2 \cdot y'} \underbrace{- \cancel{3 c_1 \cdot e^{x}} - \cancel{3 c_2 \cdot e^{-3x}}}_{-3 \cdot y} = 0 \quad \checkmark$$