Übung Math. f. BMC 1 19.11.25

Rechnen mit Vektoren und Matrizen Übungsblatt

(1) $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{c} = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = -2 + 3 + 5 = \underline{\underline{6}}$

b) $(\vec{a} - \vec{c}) \cdot (\vec{a} + \vec{c}) = \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \cdot \left[\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix} = -12 - 24 + 24$

$= \underline{\underline{-12}}$

c) $(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{c} - \vec{b}) = \underset{\vec{a}'}{\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix}} \times \underset{\vec{b}'}{\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ a_3 b_1 - a_1 b_3 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 \\ 30 \\ -18 \end{pmatrix}$

d) $(\vec{a} \times \vec{c})\vec{b} = \underbrace{\left[\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}4\\5\\1\end{pmatrix}\right] \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix}}_{\text{Volumen}} = \begin{pmatrix}-24\\18\\6\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\1\end{pmatrix} = \underline{\underline{84}}$

2 $A = \begin{pmatrix}3 & 5 & 2\\1 & 4 & 0\end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\5 & 8 & -1\end{pmatrix}$ $C = \begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\5 & -2 & 0\end{pmatrix}$ (2×3)

a) $3A + 2B - 5C$

$\Rightarrow 3\begin{pmatrix}3 & 5 & 2\\1 & 4 & 0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2 & 1 & 2\\5 & 8 & -1\end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix}1 & -1 & 2\\5 & -2 & 0\end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix}9 & 15 & 6\\3 & 12 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}4 & 2 & 4\\10 & 16 & -2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5 & -5 & 10\\25 & -10 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}13 & 17 & 10\\13 & 28 & -2\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}5 & -5 & 10\\25 & -10 & 0\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 8 & 22 & 0 \\ -12 & 38 & -2 \end{pmatrix}$$

t heißt 1. Zeile $\to$ 1. Spalte u.s.w

(2b)

$$2\left[\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 5 & 8 & -1 \end{pmatrix}\right] - 3\left[\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 8 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}\right]^t - 2\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 5 & -2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2\left[\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 2 & 4 \\ 10 & 16 & -2 \end{pmatrix}\right] - 3\begin{pmatrix} -1 & 4 \\ -4 & 4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}^t - \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 10 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 2\begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ -9 & -12 & 2 \end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix} -1 & -4 & 0 \\ 4 & 4 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 10 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 & 6 & -4 \\ -18 & -24 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & -12 & 0 \\ 12 & 12 & -3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -2 & 4 \\ 10 & -4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 20 & -8 \\ -40 & -32 & 7 \end{pmatrix}$$

(3)

$$A = \begin{pmatrix} -6 & 9 & -3 \\ -4 & 6 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$$

Zu zeigen $A \cdot B \neq B \cdot A$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 0-9-6 & -6+0+9 & 12+27+0 \\ 0-6-4 & -4+0+6 & 8+18+0 \\ 0-3-2 & -2+0+3 & 4+9+0 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} -15 & 3 & 39 \\ -10 & 2 & 26 \\ -5 & 1 & 13 \end{pmatrix}}} = A \cdot B$$

$$B \cdot A \quad \begin{pmatrix} \cancel{0} & \cancel{1} & \cancel{-2} \\ -1 & 0 & 3 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -6 & 9 & -3 \\ -4 & 6 & -2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{nur 1 Element}]{\text{rechne}} b_{11} \cdot a_{11} + \ldots = 0 - 4 + 4 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdot \\ \vdots & & \vdots \\ \cdot & \cdots & \cdot \end{pmatrix}$$

↯ Wid.

$\rightarrow A \cdot B \neq B \cdot A$

④ $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$

a) $\underbrace{(A + B)} \cdot C = A \cdot C + B \cdot C \ (?)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \\ 4 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0+0+0 & 0+2+0 \\ 6+0+4 & 2+0+20 \\ 12+0+1 & 4+8+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 10 & 22 \\ 13 & 17 \end{pmatrix}$$

Regel stimmt

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \underset{C}{\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 3 & 19 \\ 13 & 11 \end{pmatrix}; \quad \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 6 \\ 7 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \checkmark$$

q.e.d

b) $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ -2 & 5 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{t} \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -2 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}}$$

$$B^t = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{B^t} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{A^t} = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -2 \\ -2 & 5 & 5 \\ 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

✓ Regel stimmt

$t \to$ n-te Zeile wird n-te Spalte und umgekehrt.

(5) $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

zu zeigen binom. Formel für reelle Zahlen gilt nicht

a) $(A+B)^2$ $\quad (A+B) = \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix}}_{\hat{=} (A+B)^2} \Longrightarrow$

$$\Longrightarrow \quad = \begin{pmatrix} 24 & 25 & 10 \\ 17 & 25 & 6 \\ 13 & 14 & 7 \end{pmatrix}$$

Satz ist widerlegt!

Jetzt:

$$A^2 \hat{=} A \cdot A = \begin{pmatrix} 8 & 2 & 10 \\ 5 & 14 & 1 \\ 6 & 6 & 6 \end{pmatrix} \quad B^2 \hat{=} B \cdot B = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 1 \\ 4 & 4 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \quad 2A \cdot B = \begin{pmatrix} 12 & 16 & -6 \\ 8 & 10 & 4 \\ 8 & 12 & -2 \end{pmatrix}$$

$\Sigma\, 25$ ⚡