Übung Math 1/2 für BMC1 24.11.25

Blatt: Gauss Algorithmus, Determinante, Invertierbarkeit

①

$$\begin{pmatrix}1\\7\\2\end{pmatrix} x + \begin{pmatrix}5\\11\\-3\end{pmatrix} y = \begin{pmatrix}2\\7\\4\end{pmatrix} \Rightarrow \underbrace{\left(\begin{array}{cc|c}1 & 5 & 2\\ 7 & 11 & 7\\ 2 & -3 & 4\end{array}\right)}_{A \,|\, \vec{b}} \begin{array}{l} \\ -7\,\mathrm{I} \\ -2\,\mathrm{I}\end{array} \Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & 5 & 2\\ 0 & -24 & -7\\ 0 & -13 & 0\end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ -\frac{13}{24}\cdot\mathrm{II}\end{array}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cc|c}1 & 5 & 2\\ 0 & -24 & -7\\ 0 & 0 & \frac{91}{24}\end{array}\right) \rightsquigarrow \operatorname{Rg} A = 2 < \underbrace{\operatorname{Rg}(A|\vec{b})}_{=3} \Rightarrow \mathbb{L} = \emptyset$$

②

$$\begin{aligned} u + 3v + 2w &= 19\\ 2u - 18v + w &= -85\\ -6u + 2v + 3w &= 1\\ 3u + v + 5w &= 16 \end{aligned} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 3 & 2 & 19\\ 2 & -18 & 1 & -85\\ -6 & 2 & 3 & 1\\ 3 & 1 & 5 & 16\end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -2\,\mathrm{I}\\ +6\,\mathrm{I}\\ -3\,\mathrm{I}\end{array} \rightsquigarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & -24 & -3 & -123 \\ 0 & 20 & 15 & 115 \\ 0 & -8 & -1 & -41 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} II = II \,/\, (-3) \\ III = III \,/\, 5 \\ IV = IV \cdot (-1) \\ II \Leftrightarrow III \text{ vertauschen} \end{array} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & 4 & 3 & 23 \\ 0 & 8 & 1 & 41 \\ 0 & 8 & 1 & 41 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} III = III - 2 \cdot II \\ IV = IV - 2 \cdot II \end{array}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & 4 & 3 & 23 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & -5 & -5 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} IV = IV - III \\ III = III \,/\, (-5) \end{array} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} u & v & w & \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 2 & 19 \\ 0 & 4 & 3 & 23 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \end{array}$$

ist eindeutig lösbar denn: $Rg(A) = Rg(A, \vec{b}) = 3$ Zahl der Unbek.

Lösungen von unten nach oben lösen: $1 \cdot w = 1 \Rightarrow w = 1$

$4 \cdot v + 3 = 23 \Rightarrow v = 5$

$\Rightarrow u = 2$

(c) $\begin{pmatrix} 1 & 5 & -1 & -9 \\ -6 & 6 & -9 & -15 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 21 \end{pmatrix}$

$\mathrm{II} = \mathrm{II}/(-3) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -9 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & 5 & 7 \end{array}\right) \quad \mathrm{II} - 2\mathrm{I} \rightsquigarrow$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 5 & -1 & -9 & -1 \\ 0 & -12 & 5 & 23 & 9 \end{array}\right) \quad Rg(A) = Rg(A, \vec{b}) = 2 < 4$ (4 Unbek.)

Mehrdeutig lösbar $\Rightarrow$ x_3 und x_4 frei wählbar

partikuläre Lösung $\Rightarrow x_3 = x_4 = 0$

$x_2 = -\frac{3}{4}$ $\qquad x_1 = \frac{3}{4} \cdot 5 - 1 = \frac{11}{4}$

Allg. homogene Lösung (Ergebnis = 0)

1) $x_3 = 1 \quad x_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad -12x_2 + 5 = \overset{\text{hom.}}{0} \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{5}{12}$

$x_1 + \frac{25}{12} - 1 = \overset{!}{0} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{13}{12}$

2) $x_3 = 0 \quad x_4 = 1 \qquad -12x_2 + 23 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = \frac{23}{17}$

$x_1 + \frac{115}{12} - 9 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{7}{12}$

Ergebnis: $\mathbb{L} = \begin{pmatrix} 11/4 \\ -3/4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} -\frac{13}{12} \\ 5/12 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} -7/12 \\ 23/17 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

unendl. viele Lösungen

(2)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & a \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & a \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & a & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a & 0 \end{array}\right)$$

a) $\det A = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot a = \underline{\underline{a}}$

b) $\det = 0 \Rightarrow$ nicht invertierbar

also bei $a = 0$

c) für welches a ist das LGS lösbar?

$Rg(A) = Rg(A, \vec{b}) = 5 =$ Anzahl d. Unbekannten, falls $\underline{\underline{a \neq 0}}$

$A\vec{x} = \vec{b}$ eindeutig lösbar mit (durch sukzessives Einsetzen von unten nach oben)

$a \cdot x_5 = 0 \Rightarrow x_5 = 0$

$x_4 = 1, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 0$

falls $a = 0$: $Rg(A) = Rg(A, \vec{b}) = 4 < 5$ (Zahl d. Unbekannten)

$A\vec{x} = \vec{b}$ hat unendl. viele Lösungen.

Partikuläre Lösung $\quad x_5 = 0 \quad x_4 = 1 \quad x_3 = 0 \quad x_2 = 0 \quad x_1 = 0$

Homogene Lösung $\quad x_5 = 1 \Rightarrow x_4 = 0, \quad x_3 = 0, \quad x_2 = 0, \quad x_1 = 0$

$$\Rightarrow \mathbb{L} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Vereinbarung beachten

spezielle Lösung für $\alpha = 2$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

3. für welche λ besitzt das LGS genau eine Lösung

$$\underbrace{\begin{pmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

genau 1 Lösung wenn $\det(A) \neq 0$

$$\begin{pmatrix} -1 & \lambda & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1-\lambda & 3 \end{pmatrix} \overset{III = III + 2 \cdot I}{} \begin{pmatrix} -1 & \lambda & -1 & -1 & \lambda \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 1+\lambda & 1 & 0 & 1+\lambda \end{pmatrix}$$

$$\Longrightarrow \det A = -(2+1+\lambda) = -(3+\lambda) \Longrightarrow \lambda \in \mathbb{R} \setminus -3$$

ohne

eindeutig für

④ $A = \begin{pmatrix} 1 & -a & -a \\ 3 & -a & -3 \\ a & 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\vec{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Lösungsgesamtheit f. $a = 2$

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 3 & -2 & -3 & 2 \\ 2 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} \mathrm{II} - 3 \cdot \mathrm{I} \\ \mathrm{III} - 2 \cdot \mathrm{I} \end{array}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \end{array}\right)$ $\mathrm{III} - \mathrm{II}$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$

partik. Lösung: $x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{4} \quad x_1 = \frac{1}{2}$

allg. homogene Lösung: $x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = -\frac{3}{4} \quad x_1 = \frac{1}{2}$

$\mathbb{L} := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \\ 1 \end{pmatrix} \quad \alpha \in \mathbb{R}$

Rest nächstes mal!