$$W(x) = \begin{pmatrix} \sin(3x) & \cos(3x) \\ 3\cdot\cos(3x) & -3\cdot\sin(3x) \end{pmatrix} \xrightarrow{\det} -3\cdot\sin(3x)\cdot\sin(3x) - 3\cdot\cos(3x)\cdot\cos(3x)$$

$$= -3\cdot\sin^2(3x) - 3\cdot\cos^2(3x) = -3\,(\underbrace{\sin^2(3x) + \cos^2(3x)}_{1}) = -3 \quad \det W(x)$$

$$K_1 = \cancel{-}\int \frac{\cancel{3}\cdot\cos(3x)}{\cancel{-3}}\,dx = \int \cos(3x)\,dx$$

$$= \frac{1}{3}\sin(3x)$$

$$K_2 = \int \frac{3\cdot\sin(3x)}{-3}\,dx = -\int \sin(3x)\,dx = \frac{1}{3}\cos(3x)$$

$$y_p = \frac{1}{3}$$

$$\boxed{y'' + 4y = 8x^2}$$

typ rechte Seite $y'' + a\cdot y' + by = g(x)$

$y'' + 4y = 0$ ausrechnen $y = e^{\lambda x}$ ~~$y' = \lambda \cdot e^{\lambda x}$~~ $y'' = \lambda^2 \cdot e^{\lambda \cdot x}$

nicht gebraucht

$\lambda^2 \cdot \cancel{e^{\lambda x}} + 4 \cdot \cancel{e^{\lambda \cdot x}} = 0 \quad | : e^{\lambda x}$

$\Rightarrow \lambda^2 + 4 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = -4 \quad \lambda = \pm 2i$

mit Spickzettel $\Rightarrow y_h = c_1 \cdot \cos(2x) + c_2 \cdot \sin(2x)$

Störglied $8x^2$ bei uns $a = 0$ (kein y')

$b \neq 0$

$\Rightarrow y_p = Ax^2 + B\cdot x + C$

$y_p' = 2Ax + B; \; y_p'' = 2A$

einsetzen:

$$2A + 4 \cdot A x^2 + 4B \cdot x + 4C = 8x^2 \leftarrow \text{Störglied}$$

kommt rechts nicht vor also $2A + 4C = 0$

$B = 0$

$4 \cdot A = 8 \Rightarrow A = 2$

$\Rightarrow 2A = -4C$

$C = -\frac{1}{2}A$

$\Rightarrow 4 = -4C$

$\Rightarrow C = -1$

$$\Rightarrow y_p = Ax^2 + \cancel{Bx} + C$$

$$y_p = 2x^2 - 1$$

mit Probe:

$y_p' = 4x \qquad y_p'' = 4 \quad \xrightarrow[\text{einsetzen}]{} \quad 4 + 4(2x^2 - 1) = \cancel{4} + 8x^2 - \cancel{4} = 8x^2$ ✓

$y'' - 3y' + 2y = e^x$ rechte Seite $e^{c\cdot x} \Rightarrow \underline{c = 1}$

1) $y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_{1/2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2} = \dfrac{3 \pm 1}{2}$ $\nearrow \underline{\underline{\lambda_1 = 2}}$ $\searrow \underline{\underline{\lambda_2 = 1}}$

λ_1 λ_2

$\Rightarrow y_h = C_1 \cdot e^{2x} + C_2 \cdot e^{1\cdot x}$ 2 reelle λ

c ist einfache Lösung $\Rightarrow \underline{y_p = A \cdot x \cdot e^x}$

$\underline{y_p' = A\left(e^x + x \cdot e^x\right)}$ $y_p'' = A\left(e^x + e^x + x \cdot e^x\right) = \underline{Ae^x(2+x)}$

in DGL einsetzen

$$A\cdot e^x(2+x) - 3A(e^x + x\cdot e^x) + 2Ax\cdot e^x = e^x$$

$$2A\cdot e^x + \cancel{Ax\cdot e^x} - 3A\cdot e^x - \cancel{3Ax\cdot e^x} + \cancel{2Ax\cdot e^x} = e^x$$

$$-A\cdot e^x = 1\cdot e^x \qquad -A = 1 \Rightarrow \underline{A = -1}$$

y_p war $A\cdot x\cdot e^x \Rightarrow y_p = -x\cdot e^x \Rightarrow$ Gesamtlösung

$$y = y_p + y_n = \underline{-x\cdot e^x + c_1\cdot e^{2x} + c_2\cdot e^x}$$

$$y'' + 2y' - 15y = 2\cdot e^{-5x}$$

$c = -5$

y_h – aus $\lambda^2 + 2\lambda - 15 = 0 \Longrightarrow$

$$\lambda_{1/2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4+60}}{2} \qquad \lambda_1 = 3 \qquad \lambda_2 = -5$$

einf. Lösung
d. Polynoms

$$\Longrightarrow y_h = c_1\cdot e^{3x} + c_2\cdot e^{-5x}$$

$$y_p = A\cdot x\cdot e^{-5x}$$

$y''' + y'' + y' + y$

$= 5$

$$y_p' = A\cdot\left(e^{-5x} - 5x\cdot e^{-5x}\right) \xrightarrow{2y_p'} 2A\left(e^{-5x} - 5x\cdot e^{-5x}\right) \Longrightarrow -15y_p = -15\cdot A\cdot x\cdot e^{-5x}$$

$$y_p'' = A\left(-10\cdot e^{-5x} + x\cdot 25\, e^{-5x}\right)$$