Übungen Math 1/2 für BMC1 26.11.25

letzte Aufgabe des vorigen Blattes: a) erledigt

b) $\underline{E}$ ist Dreiecksmatrix mit genau einer Zeilenvertauschung

$\Rightarrow$ det E = Produkt der Diagonalelemente : $\underbrace{-6\cdot 7}_{-42}\cdot(b^3-b^2-6b)$

das Vorzeichen ändert nichts an der Lösungsmenge.

ⓒ Eindeutig lösbar wenn $\det(B) \neq 0$ Prüfen $(b^3-b^2-6b) = 0$

$\Rightarrow b\cdot(\underbrace{b^2-b-6}_{0\,?})$ ist Null wenn $b_1 = 0$

$\Rightarrow b_2 = 3 \quad b_3 = -2 \Rightarrow b \notin \{-2, 0, 3\}$

d) $B\vec{x} = \vec{w}$ hat keine Lösung $\Longleftrightarrow$ $Rg(B) < Rg(B, \vec{w})$

$\Leftrightarrow$ $c_{3,3} = 0 \wedge c_{3,4} \neq 0$ $\Longleftrightarrow$ $b \in \{-2, 0, 3\} \wedge b^2 + 3b + 2 \neq 0$

$\Leftrightarrow b \in \{-2, 0, 3\} \underset{\text{und}}{\wedge} (b+2)(b+1) \neq 0 \Longleftrightarrow b \in \{0, 3\}$

e) für $b \neq 2$ gilt $c_{3,3} = 0$ und $c_{3,4} = 0$ $\Longrightarrow$ <u>∞ viele</u> Lösungen

Blatt LGS, inverse Matrix, Eigenwert, Eigenraum

gegeben: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\vec{b} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ a) det A

$$\begin{matrix} I \to \underline{III} \\ II \to \underline{IV} \end{matrix} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underline{III} = \underline{III} - 2\underline{I} \rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & a & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \underline{IV} = \underline{IV} - a \cdot \underline{II}$$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \vec{b} \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1-2a & -2a \end{array}\right) \end{array} \Rightarrow \underline{\underline{\det(A) = -3(1-2a)}}$$

b) $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \underline{\underline{a \neq \frac{1}{2}}}$ eindeutig lösbar

von unten nach oben: $(1-2a) \cdot x_4 = -2a \Rightarrow \underline{\underline{x_4 = \frac{2a}{2a-1}}}$;

$-3x_3 = -5 \Rightarrow \underline{\underline{x_3 = \frac{5}{3}}}$;

$$x_2 + \frac{4a}{2a-1} = 2 \quad \Rightarrow \quad x_2 = 2 + \frac{4a}{1-2a} = 2 - \frac{4a}{2a-1}$$

$$x_1 + \frac{10}{3} = \frac{9}{3} \quad \Rightarrow \quad x_1 = -\frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 2 + \frac{4a}{1-2a} \\ \frac{5}{3} \\ \frac{-2a}{1-2a} \end{pmatrix}$$

2. Inverse berechnen

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \underline{III} = \underline{III} + \underline{I}$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{3} & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \underline{IV} = \underline{IV} + \sqrt{3} \cdot \underline{II}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & \sqrt{3} & 0 & 1 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} \overline{IV} = \frac{1}{4} \cdot \overline{IV} \\ \overline{II} = \overline{II} - \sqrt{3} \cdot \overline{IV} \\ \overline{III} = \frac{1}{2} \cdot \overline{III} \end{array}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}\right) \quad \overline{I} = \overline{I} - \overline{III}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \overbrace{\begin{array}{cccc} \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{4} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{4} & 0 & \frac{1}{4} \end{array}}^{A^{-1}} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \end{array}\right)$$

③ $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & -2 \\ -2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$

a) Zeigen 3 = Eigenwert

$$\det\begin{pmatrix} -1-\lambda & -2 & -2 \\ -2 & -1-\lambda & 2 \\ -2 & 2 & -1-\lambda \end{pmatrix} = \begin{array}{ccc|cc} -1-\lambda & -2 & -2 & -1-\lambda & -2 \\ -2 & -1-\lambda & 2 & -2 & -1-\lambda \\ -2 & 2 & -1-\lambda & -2 & 2 \end{array}$$

$\Rightarrow$ charakteristisches Polynom $p(\lambda) := (9-\lambda^2)(3+\lambda) = 0$

$(3-\lambda)(3+\lambda)$

$\Rightarrow$ $\underline{\underline{\lambda_1 = 3}}$ $\underline{\underline{\lambda_2 = -3}}$

ist EW!

c) Eigenraum zu $\lambda = 3$ $\Rightarrow$ $(A - \overset{\lambda}{3}E)\cdot\vec{x} = 0$

einsetzen

$$\rightsquigarrow \begin{pmatrix} -4 & -2 & -2 \\ -2 & -4 & 2 \\ -2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ aber besser $\overset{\text{Gauss}}{\rightsquigarrow}$ $\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 6 & -6 \\ 0 & 6 & -6 \end{pmatrix} \rightsquigarrow$

$$\rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{matrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

$$x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \Rightarrow x_1 = -1$$

$$E_3 = \alpha \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eigenraum zu $\lambda = -3$

$$\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

entweder $x_2 = 1$ $\quad x_3 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$

oder $x_2 = 0$ $\quad x_3 = 1 \Rightarrow x_1 = 1$

$$E_{-3} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

④ Alle Eigenwerte zu Eigenvektor zum reellen Eigenwert

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Laplace

2. $\det \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot E)$$

$$= \det \begin{pmatrix} 2-\lambda & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -\lambda & -1 \\ 2 & -4 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{p(\lambda)} (2-\lambda)^2 \cdot \underbrace{(\lambda^2+1)}_{\lambda = \pm j} = 0$$

$= 0$ für $\lambda = 2$

reell $\lambda = 2$ d.h. 2 einsetzen

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & -1 \\ 2 & -4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{array}$$

x_1, x_3 fest

$x_2 = 1, \quad x_4 = 0 \implies x_3 = 0 \quad x_1 = 2$

$x_2 = 0, \quad x_4 = 1 \implies x_3 = 0 \quad x_1 = 1$

$$\implies E = \underset{\mathbb{R}}{\alpha} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \underset{\mathbb{R}}{\beta} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

oder $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$ oder . . . – — –