Tutorium Math f. BMC2 13.5.26

DGL Typ „rechte Seite"

b

$y'' - 3y' + 2y = x^2 + 2x$ „vollst. Lösung"

$y'' - 3y' + 2y = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0 \Rightarrow y_h = c_1 \cdot e^x + c_2 \cdot e^{2x}$

$\lambda_1 = 2 \quad \lambda_2 = 1$

$y_p = B_2 \cdot x^2 + B_1 \cdot x + B_0$

$y_p' = 2 \cdot B_2 \cdot x + B_1$

$y_p'' = 2B_2$

$\Rightarrow 2B_2 - 3(2 \cdot B_2 x + B_1) + 2(B_2 x^2 + B_1 x + B_0)$

$2B_2 - 6B_2 x - 3B_1 + 2B_2 x^2 + 2B_1 x + 2B_0 = x^2 + 2x$

$\Rightarrow 1 = 2B_2$

$B_2 = \frac{1}{2}$

$2B_2 - 3B_1 + 2B_0 = 0$

$B_0 = \frac{13}{4}$ $\quad B_1 = \frac{5}{2}$ $\quad B_2 = \frac{1}{2}$

$$y = y_h + y_p = \underline{c_1 e^{x} + c_2 \cdot e^{2x} + \frac{1}{2} x^2 + \frac{5}{2} x + \frac{13}{4}}$$

$$y'' - y' - 6y = 12 \cdot \cosh(3x) \quad \hat{=}$$

Seil

$y_h =$ mit $\lambda_1 = 3$ $\lambda_2 = -2 \Longrightarrow y_h = c_1 \cdot e^{3x} + c_2 e^{-2x}$

$$\underline{\underline{g(x) = 12 \cosh(3x)}} \Longrightarrow 12 \cdot \frac{1}{2}\left(e^{3x} \underline{+} e^{-3x}\right) = \underline{\underline{6 \cdot e^{3x} + 6 \cdot e^{-3x}}}$$

$12 \cdot \sinh(3x)$

$$g_1 = 6 \cdot e^{3x} \xrightarrow[c=3]{\text{einfach}} y_{p1} = A \cdot x \cdot e^{3x}$$

$$g_2 = 6 \cdot e^{-3x} \xrightarrow[\text{keine}]{c=-3} y_{p2} = A \cdot e^{-3x}$$

$$\Rightarrow \quad y_p = y_{p_1} + y_{p_2} = A \cdot x \cdot e^{3x} + B \cdot e^{-3x} \quad \xRightarrow{\text{Abl. bis } y''}$$

$$y_p' = A \cdot e^{3x} + 3Ax \cdot e^{3x} - 3B \cdot e^{-3x}$$

$$y_p'' = 6A \cdot e^{3x} + 9Ax e^{3x} + 9B e^{-3x}$$

$$y'' - y' - 6y = 6 \cdot e^{3x} + 6 \cdot e^{-3x} \Longrightarrow 6A \cdot e^{3x} + 9Ax \cdot e^{3x} + 9B \cdot e^{-3x} \rightarrow$$

$$- \left(A \cdot e^{3x} + 3Ax \cdot e^{3x} - 3B \cdot e^{-3x}\right) - 6 \cdot \left(Ax \cdot e^{3x} + B \cdot e^{-3x}\right) = \rightarrow$$

$$= 6 \cdot e^{3x} + 6 e^{-3x} \Longrightarrow \ldots\ldots$$

$$\underbrace{(6A - A)}_{5A} \cdot e^{3x} + \underbrace{(9A - 3A - 6A)}_{0} \cdot x e^{3x} + \underbrace{(9B + 3B - 6B)}_{6B} \cdot e^{-3x} = \underline{\text{re. Seite}}$$

$$\Rightarrow 5A \cdot e^{3x} + 6B \cdot e^{-3x} = 6 \cdot e^{3x} + 6 \cdot e^{-3x}$$

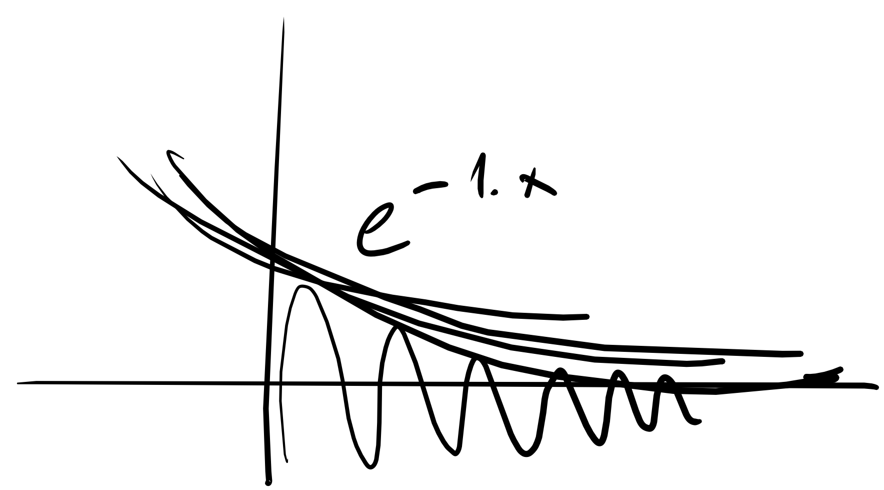
$5A = 6 \Rightarrow A = 1{,}2$ $\qquad \Rightarrow B = 1$

$\Rightarrow$ Lösungsgesamtheit: $\underline{c_1 \cdot e^{3x} \cdot c_2 \cdot e^{-2x} + 1{,}2 \cdot x \cdot e^{3x} + e^{-3x}}$

RWP: Randwertproblem $\Rightarrow$ Randbedingungen!

$y'' + 2y' + 2y = 2$ mit $y(0) + y'(\pi) = 0 \qquad y(\pi) = 1$

$$\Rightarrow \underline{\underline{\lambda_{1/2} = \underbrace{-1}_{\sigma} \pm \underbrace{1}_{\omega} j}} \Longrightarrow y_h = e^{-1 \cdot x} \cdot \left(c_1 \cdot \sin(1 \cdot x) + c_2 \cdot \cos(1 \cdot x)\right)$$



$g(x) = 2 \qquad y_p = \text{const.} = A \qquad y_p' = 0 \qquad y_p'' = 0$

in $y'' + 2y' + 2\underset{\substack{\uparrow \\ A}}{y} = 2 \implies \underline{\underline{A = 1}}$

$\underline{\underline{y_p = 1}}$

$y = y_h + y_p = e^{-x} \cdot (C_1 \cdot \sin(x) + C_2 \cdot \cos(x)) + 1$

$y' = -e^{-x} \cdot (C_1 \cdot \sin(x) + C_2 \cdot \cos(x) - C_1 \cdot \cos(x) + C_2 \cdot \sin(x))$

$y(0) = e^0 (C_1 \cdot \sin(0) + C_2 \cdot \cos(0)) + 1 = 1 \cdot (C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot 1) + 1 = C_2 + 1$

$y(\pi) = e^{-\pi} (C_1 \cdot \sin(\pi) + C_2 \cdot \cos(\pi)) + 1 = e^{-\pi} (C_1 \cdot 0 + C_2 \cdot (-1)) + 1 = -e^{-\pi} C_2 + 1$

$y'(\pi)$

$y(0) + y'(\pi) = 0 \Rightarrow \mathrm{I} \quad c_2 + 1 + e^{-\pi}(c_2 - c_1) = 0$

$y(\pi) = 1 \Rightarrow \mathrm{II} \quad -e^{-\pi} \cdot c_2 + 1 = 1 \Rightarrow -e^{-\pi} \cdot c_2 = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{c_2 = 0}}$

in I einsetzen $(\mathrm{I}) = 0 + 1 + e^{-\pi}(0 - c_1) = \underbrace{1 - e^{-\pi} c_1}_{=0}$

$\Rightarrow -e^{-\pi} \cdot c_1 = -1 \Rightarrow \underline{\underline{c_1 = e^{\pi}}}$

Gesamtlösung:

$$y = e^{-x}\left[e^{\pi} \cdot \sin(x) + 0 \cdot \cos(x)\right] + 1$$

$$\underline{y = \underbrace{e^{-x} \cdot e^{\pi}} \cdot \sin(x) + 1};$$

$$\hat{=}\ e^{\pi - x} \cdot \sin(x) + 1$$