Tutorium Mathe für BMC 1 4.12.25

Horner-Schema (in der Klausur wegen Nullstellensuche!)

Gegeben ist das Polynom $x^5 - 3x^3 + 4x^2 + 2 = p(x)$

Berechnen Sie den Wert des Polynoms bei $x = 2$

	x^5	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
	1	0	-3	4	0	2
$x=2$	↓	2	4	2	12	24
	1	2	1	6	12	26
	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0	

$\Rightarrow x^4 + 2x^3 + x^2 + 6x + 12$

$p(x) = jx^4 - 2x^2 + jx - 1 \qquad x = j$

	x^4	x^3	x^2	x^1	x^0
	j	0	-2	j	-1
$x=j$	↓	-1	$-j$	$-2j+1$	$j+1$
	j	-1	$-2-j$	$1-j$	j

komplexe Koeffizienten

$\overset{!!}{\Longrightarrow}$

$-j$ ist nicht automat. Nullstelle

Sei $p(x) = x^4 - 1$ bei $x = j$

$$
\begin{array}{c|ccccc}
 & x^4 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\
x=j & & j & -1 & -j & 1 \\
\hline
 & 1 & j & -1 & -j & 0 \\
 & x^3 & x^2 & x^1 & x^0 &
\end{array}
$$

$\downarrow$

$x = -j$??

also Nullstelle bei $x = j$ (schreibe: $(x-j)$)

prüfe Koeffizienten

1, 0, 0, 0, −1 also reell

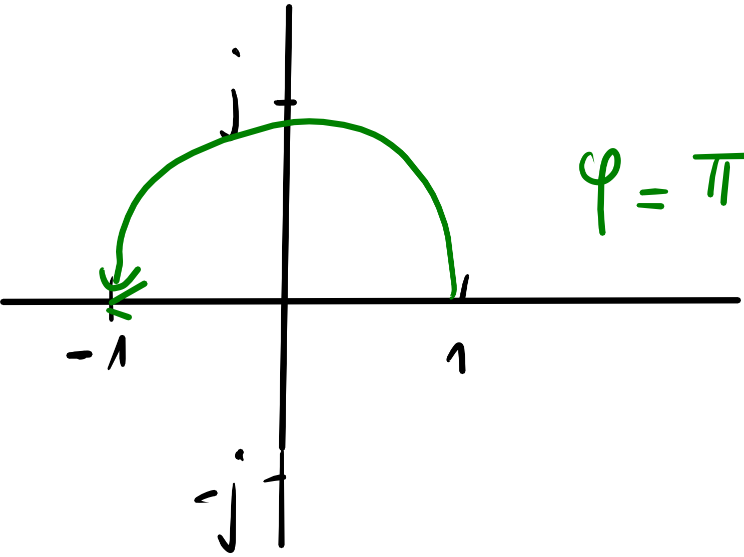
$\Longleftrightarrow$ auch $-j$ ist Nullstelle (konjugiert komplex)

Oder Beispiel wenn Koeffizienten reell und z.B. $3-2j$ ist Nullstelle

$\Longleftrightarrow$ $3+2j$ Nullstelle.

Berechnen Sie bitte:

$$(-1)^{-j}$$



$\varphi = \pi \; (180^\circ)$ $\quad |z| = 1 \quad \Longrightarrow \quad 1 \cdot e^{j\cdot\pi}$

$$\left(e^{j\pi}\right)^{-j} = e^{-j^2\cdot\pi} = e^{\pi} \approx \underline{\underline{23{,}14}}$$

Beweis: $1 \cdot e^{j\pi} = 1\left(\underbrace{\cos(\pi)}_{-1} + j\underbrace{\sin(\pi)}_{0}\right) = \underline{\underline{-1}}$ q.e.d.

Identität

über Taylorreihen

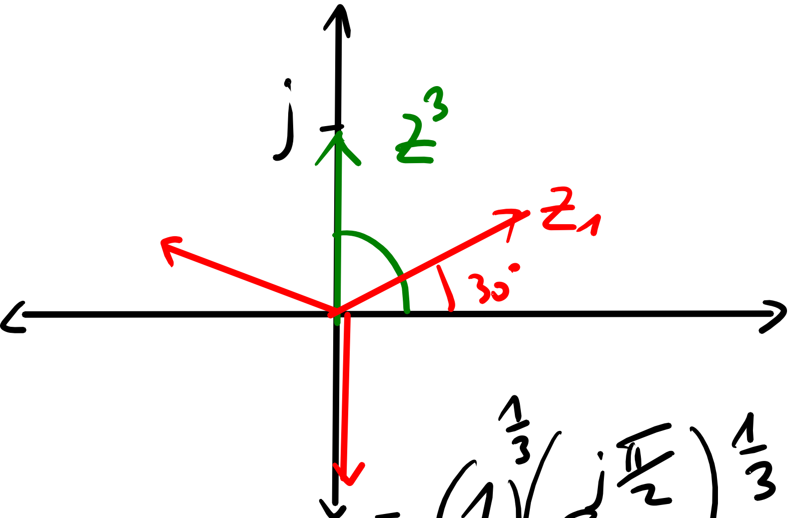
$e^x \quad x=1 \quad \left| \; e = \frac{1}{0!} + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} \dots \right.$

2,71...

$0! = 1$

$4! = 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 \qquad 7! = 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1$

Berechnen Sie die Lösungen von $z^3 = j$ (3 dritte Wurzeln)



$$|z^3| = 1 \qquad \varphi(z^3) = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

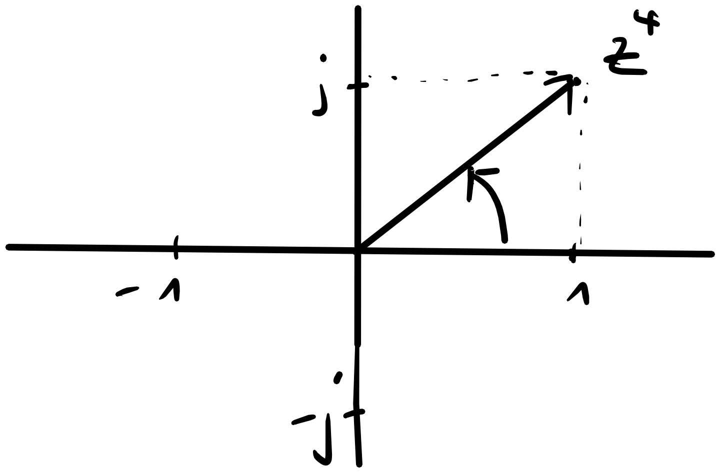
$$\Rightarrow z^3 = e^{j\frac{\pi}{2}} \Rightarrow z = \sqrt[3]{e^{j\frac{\pi}{2}}}$$

$$= (1)^{\frac{1}{3}}\left(e^{j\frac{\pi}{2}}\right)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow e^{j\frac{\pi}{6}} = z_1 \qquad \left(|z_1| = 1 \quad \varphi_1 = 30^\circ\right)$$

3 gleiche Teile also $\underbrace{120^\circ}_{\text{bei } 150^\circ}$ mehr und $\underbrace{240^\circ}_{\text{bei } 270^\circ}$ mehr.

$$\Rightarrow z_2 = e^{j\frac{5\pi}{6}} \qquad z_3 = e^{j\frac{3}{2}\pi} \quad \xrightarrow{\text{algeb.}} \quad z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + j\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}j$$

$z^4 - j = 1 \Rightarrow z^4 = 1 + j \xRightarrow{\text{exp. Form}}$



1. Quadrant $\varphi = \arctan\left(\frac{1}{1}\right) = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$

$|z^4| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \underline{\underline{\sqrt{2}}}$

umständl

$\sqrt{(1+j)\cdot(1-j)} = \sqrt{2}$

$z_1 = \sqrt[4]{2} \cdot \left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{2} \cdot e^{j\frac{\pi}{16}} \xRightarrow{\text{alg. Form}} \Rightarrow 1{,}0696 + 0{,}2127j$

$\frac{\pi}{16} \mathrel{\hat{=}} 11{,}25^\circ$

$|z_1|\left(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi)\right)$

4. Wurzel $\hat{=}$ 4 gleiche Teile also $+ 90^\circ + 180^\circ + 270^\circ + 360^\circ$

$\varphi_2 = 11{,}25^\circ + 90 \xRightarrow[\varphi_3]{} 101{,}25^\circ + 90 \Rightarrow 191{,}25^\circ \ldots$

Horner-Schema Zerlegung in Linearfaktoren

$$p(x) = jx^3 - 3x^2 - 4jx + 2$$

$\boxed{\text{bei } z_1 = 1 - j}$

	j	-3	$-4j$	2
$1-j$		$j+1$	$-1+3j$	-2
	j	$-2+j$	$-1-j$	0
	x^2	x^1	x^0	

Achtung: komplexe Koeffizienten

$\Rightarrow \bar{z} = 1 + j$ Keine Nullstelle

$$\Rightarrow p(x)_{\text{Rest}} = \underbrace{j}_{a}x^2 + \underbrace{(-2+j)}_{b} \cdot x + \underbrace{(-1-j)}_{c} = 0$$

$$z_{2,3} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$z_{2/3} = \frac{-(-2+j) \pm \sqrt{(-2+j)^2 - 4j\cdot(-1-j)}}{2j}$$

$$= \frac{2-j \pm \sqrt{(3-\cancel{4j}) + (\cancel{4j}-4)}}{2j} = \frac{2-j \pm \sqrt{-1}}{2j}$$

$$= \frac{2-j \pm j}{2j} \rightarrow z_2 = \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}j} = \frac{1}{j}\frac{(-j)}{(-j)} = \underline{\underline{-j}}$$

$$z_3 = \frac{2-2j}{2j} = \frac{1-j}{j}\cdot\left(\frac{-j}{-j}\right) = \frac{-j-1}{1} = \underline{\underline{-1-j}}$$

$$P(z) = \left(z-(1-j)\right)\left(z+j\right)\left(z-(-1-j)\right)$$