Tutorium Mathe f. BMC 11.12.25

die Regel de l'Hospital (sprich: dö l'Oppidal)

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

(~~häufiger Fehler~~: wird mit der Quotientenregel verwechselt)

einfach → $\boxed{\dfrac{\text{Zähler ableiten, notfalls mehrmals}}{\text{Nenner ableiten, notfalls mehrmals}}}$

für „Hospital" braucht man immer einen „Bruch"

z.B. wenn $\lim_{x \to 0} x \cdot \ln(x) \Longrightarrow \dfrac{\ln(x)}{x^{-1}}$!! $\Rightarrow \dfrac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} \ldots$

$$\lim_{x \to 0} \sin(x)^{\tan(x)}$$ immer wenn Grenzwert einer Potenz gesucht wird

$$\Rightarrow \lim_{x \to 0} e^{\ln\left(\sin(x)^{\tan(x)}\right)} \qquad \Rightarrow e^{\ln(f(x))} = f(x)$$

$$\Rightarrow \underset{\uparrow}{e}^{\tan(x) \cdot \ln(\sin(x))}$$

Konstant

betrachte den Grenzwert des <u>Exponenten</u>.

$$\lim_{x \to 0} \tan(x) \cdot \ln(\sin(x)) = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(\sin(x))}{\tan^{-1}(x)} = \frac{-\infty}{0} \;↯$$

$$\frac{1}{\frac{1}{\tan(x)} = \tan^{-1}(x)} \qquad \Rightarrow \text{Hospital}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{\sin(x)} \cdot \cos(x)}{-1 \cdot \tan^{-2}(x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}} = \frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{-\frac{1}{\tan^2(x)} \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}} = \frac{\frac{\cos(x)}{\sin(x)}}{-\frac{\cancel{\cos^2(x)}}{\sin^2(x)} \cdot \frac{1}{\cancel{\cos^2(x)}}}$$

$$\Rightarrow \frac{\cos(x) \cdot \left(-\sin^{\cancel{2}}(x)\right)}{\cancel{\sin(x)}} \Rightarrow -\sin(x) \cdot \cos(x) \quad \lim_{x \to 0} = -0 \cdot 1 = \underline{\underline{0}}$$

d.h. Exponent strebt gegen Null

$\Rightarrow$ e^0 strebt gegen $\underline{\underline{1}}$

Berechnen Sie den Grenzwert

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\infty}{\infty} \;\lightning\; \text{Wid.} \Longrightarrow \text{Hospital}$$

$$\Longrightarrow \frac{\cosh(x)}{\sinh(x)} \Longrightarrow \frac{\infty}{\infty} \;\lightning\; \text{Hospital II} \Longrightarrow \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\infty}{\infty} \;\lightning$$

aber $$\frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{\cancel{\tfrac{1}{2}}(e^{x}-e^{-x})}{\cancel{\tfrac{1}{2}}(e^{x}+e^{-x})} = \frac{\cancel{e^{x}}(1-e^{-2x})}{\cancel{e^{x}}(1+e^{-2x})} = \frac{1-\overbrace{\frac{1}{e^{2x}}}^{\to 0}}{1+\underbrace{\frac{1}{e^{2x}}}_{\to 0}} \quad x\to\infty$$

$$= 1$$

$$\lim_{x \to a} \frac{a^x - x^a}{x - a} \overset{\text{Hop.}}{\Longrightarrow} \frac{a^x \cdot \ln(a) - a \cdot x^{a-1}}{1} \qquad a \in \mathbb{R}$$

$$a^x = e^{\ln a^x} = e^{x \cdot \ln a} \xrightarrow{\text{abl.}} \underbrace{e^{x \cdot \ln a}}_{a^x} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln(a)$$

$$x \to a \Rightarrow \frac{a^a \cdot \ln(a) - a \cdot a^{a-1}}{1} \Rightarrow \frac{a^a \cdot \ln(a) - a^a}{1} \Rightarrow \underline{\underline{a^a(\ln(a) - 1)}}$$

Seien a, b pos. Parameter $\qquad a \in \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(ax)}{bx} \xrightarrow{x=0} \frac{0}{0} \Longrightarrow H.$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{a \cdot \sin(a x)}{b} \xrightarrow[x \to 0]{} \underline{\underline{0}}$$

Berechnen Sie $\lim_{x \to 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2-x}} \overset{H.}{\Longrightarrow} e^{\ln\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2-x}}\right)} = e^{\frac{1}{2-x} \cdot \ln\left(\frac{x}{2}\right)}$

Betrachte Exponenten $\frac{1}{2-x} \cdot \ln \frac{x}{2} \Rightarrow \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{-x} \overset{H.}{\Longrightarrow} \frac{\frac{1}{x/2} \cdot \frac{1}{2}}{-1} \overset{x \to 2}{\Longrightarrow}$

$= \frac{1 \cdot \frac{1}{2}}{1} = \underline{\underline{\frac{1}{-2}}}$ (Exponent) $\Longrightarrow \lim_{x \to 2} f(x) = e^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{e}}}}$

Berechnen Sie $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} e^{\left(\frac{4x-\pi}{\cot(\pi-2x)}\right)}$

Hinweis: $\cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$

lim Exponent $x \to \frac{\pi}{4}$

$$\frac{4x-\pi}{\cot(\pi-2x)} \xrightarrow{H.} \frac{4}{-\frac{1}{\sin^2(\pi-2x)} \cdot (-2)}$$

$$\cot(x)' = -\frac{1}{\sin^2(x)}$$

$$x \to \frac{\pi}{4} \Rightarrow \frac{4}{-\frac{1}{1} \cdot (-2)} = \underline{\underline{2}} \Rightarrow \underline{\underline{e^2}}$$

Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim_{x \to 1} \left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)^{\frac{1}{1-x}}$ $\Rightarrow e^{\sim}$

$$\Rightarrow e^{\frac{1}{1-x}\cdot \ln\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)} \Rightarrow \text{Exponent nach Hospital}$$

$$\Rightarrow \frac{\ln\left(\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)\right)}{1-x} \xrightarrow{H.} \frac{\frac{1}{\sin\left(\frac{\pi x}{2}\right)}\cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2}\right)\cdot \frac{\pi}{2}}{-1}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{\pi}{2}}{-\tan\left(\frac{\pi x}{2}\right)} \xrightarrow[x \to 1]{} \frac{\frac{\pi}{2}}{-\infty} = \underline{\underline{0}} \Rightarrow e^0 = \underline{\underline{1}}$$

$$\lim_{x \to 1} \frac{(1-x^2)^3}{(1-x^3)^2} \xrightarrow{H.} \frac{3(1-x^2)^2\cdot(-2x)}{2(1-x^3)\cdot(-3x^2)} \xrightarrow{H.\,\mathbb{II}}$$

$$\frac{3}{2}\ \frac{2(1-x^2)\cdot(-2x)\cdot(-2x)+(1-x^2)^2\cdot(-2)}{-3x^2\cdot(-3x^2)+(1\cancel{-x^3})\cdot(-\cancel{6}x)} \xrightarrow[x\to 1]{} \frac{0}{9}\cdot\frac{3}{2}$$

$$= \underline{\underline{0}}$$