Tutorium Math f. BMC2 20.5.26

Doppelintegrale: Manchmal kommt es auf die Reihenfolge d. Integration an. Enthält eines der Integrale die Variable des anderen in den Grenzen muss dies zuerst ausgef. werden. Bei festen Grenzen egal

Bestimmen Sie $\displaystyle\iint \frac{1}{e-1}\cdot\frac{e^{\frac{x}{y+1}}}{(y+1)^2}\,dA$

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \,\middle|\, \underbrace{0\le x\le y+1}_{\text{I.}},\ \underbrace{e-1\le y\le e^2-1}_{\text{II.}}\right\}$$

$e\approx 2{,}71\ldots$

$$= \int_{e-1}^{e^2-1} \int_0^{y+1} \frac{1}{e-1} \cdot \frac{e^{\frac{x}{y+1}}}{(y+1)^2} \, dx \, dy \Rightarrow \int_{e-1}^{e^2-1} \frac{1}{e-1} \cdot \left[\frac{e^{\frac{x}{y+1}}}{(y+1)} \right]_0^{y+1} dy$$

kann verschoben werden

$$= \int_{e-1}^{e^2-1} \frac{1}{e-1} \left(\frac{e^1}{y+1} - \frac{1}{y+1} \right) dy = \int_{e-1}^{e^2-1} \frac{1}{\cancel{e-1}} \cdot \left(\frac{\cancel{e-1}}{y+1} \right) dy$$

$$= \int_{e-1}^{e^2-1} \frac{1}{y+1} \, dy = \Big[\ln(y+1) \Big]_{e-1}^{e^2-1} = \ln(e^2) - \ln(e)$$

$$= 2 - 1 = \underline{\underline{1 \text{ V.E.}}}$$

Doppelint. $f(x,y) = \dfrac{e^{2\cdot\sin\left(\frac{x}{y}\right)}\cdot\cos\left(\frac{x}{y}\right)}{y}$

wegen

$A = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \underbrace{1 \leq y \leq 3}_{\text{II.}} \;;\; \underbrace{0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}y}_{\text{I.}} \right\}$

$= \int_1^3 dy \int_0^{\frac{\pi}{2}\cdot y} \dfrac{e^{2\cdot\sin\left(\frac{x}{y}\right)}\cdot\cos\left(\frac{x}{y}\right)}{y}\, dx \Rightarrow \int_1^3 \left[\frac{1}{2} e^{2\cdot\sin\left(\frac{x}{y}\right)}\right]_0^{\frac{\pi}{2}\cdot y} dy$

$= \int_1^3 \left(\frac{1}{2}\cdot e^{2\sin\left(\frac{\pi}{2}\cdot\cancel{\frac{y}{y}}\right)} - \frac{1}{2}\right) dy = \int_1^3 \frac{1}{2}\left(e^2-1\right) dy$

$= \left[\frac{1}{2}\left(e^2-1\right)\cdot y\right]_1^3 = \frac{3}{2}\left(e^2-1\right) - \frac{1}{2}\left(e^2-1\right) = \underline{\underline{e^2-1}} \approx 6{,}39$

Doppelint. v. $f(x,y) = \frac{\sin(x^2)}{\underbrace{\sqrt[3]{y^2}}_{y^{\frac{2}{3}}}}$; $A = \left\{ (x,y) \,\middle|\, \underbrace{\tfrac{1}{2}\sqrt{\pi} \le x \le \sqrt{\pi}}_{\mathrm{II.}} \,;\, \underbrace{x^3 \le y \le 8x^3}_{\mathrm{I.}} \right\}$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} dx \int_{x^3}^{8x^3} \frac{\sin(x^2)}{y^{\frac{2}{3}}}\, dy = \int_{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} dx \int_{x^3}^{8x^3} \sin(x^2) \cdot y^{-\frac{2}{3}}\, dy$$

$$\Rightarrow \int_{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} \sin(x^2)\, dx \left[3 \cdot y^{\frac{1}{3}} \right]_{x^3}^{8x^3} = \int \sin(x^2)\, dx \cdot (6x - 3x) = \int_{\frac{1}{2}\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}} 3x \sin(x^2)\, dx$$

$\frac{1}{1/3}$

$$\Rightarrow 3 \int_{\sqrt{\pi}/2}^{\sqrt{\pi}} x \cdot \sin(x^2)\, dx \Rightarrow 3 \cdot \left[-\frac{1}{2} \cos(x^2) \right]_{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}^{\sqrt{\pi}} \Rightarrow = \frac{6 + 3\sqrt{2}}{4} \approx 2{,}56$$

Tab. / Intuition od. part. Int.

$$f(x,y) = e^{xy^2} \qquad \underbrace{1 \le y \le 2}_{\text{II.}} \qquad \underbrace{0 \le x \le \frac{1}{y^2}}_{\text{I.}}$$

$$\Rightarrow \int_1^2 \int_0^{\frac{1}{y^2}} e^{xy^2} \cdot dx \cdot dy \Rightarrow \int_1^2 \left[\frac{1}{y^2} e^{xy^2} \right]_0^{\frac{1}{y^2}} dy \Rightarrow \int_1^2 \frac{1}{y^2} \left(e^1 - 1 \right) dy$$

erst.

$$\Rightarrow (e-1) \cdot \int_1^2 y^{-2} \, dy \Rightarrow (e-1) \cdot \left[-y^{-1} \right]_1^2 \Rightarrow (e-1)\left(-\frac{1}{2} - -1 \right)$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{(e-1) \cdot \frac{1}{2}}} \approx \underline{\underline{0{,}86 \text{ V.E}}}$$