Tut. Math. BMC 20.5.26

Grenzwert $\lim\limits_{x\to 2} \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2-x}} \xrightarrow[\text{mit } x=2]{} \lim 1^{\frac{1}{0}}$ ↯

mit ln und e-Funktion $\Rightarrow e^{\ln(x)} = x \quad \left(e^{\ln(7,2)} = 7,2\right)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} e^{\ln\left(\left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2-x}}\right)} \xRightarrow{\ln(a^b) = b\cdot\ln(a)} \Rightarrow \lim_{x\to 2} e^{\frac{1}{2-x}\cdot\ln\left(\frac{x}{2}\right)}$$

betrachte nur den Exponenten

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2} \frac{\ln\left(\frac{x}{2}\right)}{2-x} \xRightarrow{H.I.}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{1}{(x/2)}\cdot\frac{1}{2}}{-1} = \frac{\frac{\cancel{2}}{x}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}}{-1} = -\frac{1}{x} \xrightarrow{x\to 2} = -\frac{1}{2} \hat{=} \text{Grenzw. des Expon.}$$

aber $e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}} = \underline{\underline{\frac{1}{\sqrt{e}}}}$

Integrieren Sie durch eine geeignete Substitution

$$\int e^x \cdot \sin(e^x)\, dx \qquad z = e^x \xRightarrow[\text{z nach x}]{\text{abl.}} \frac{dz}{dx} = e^x = z'$$

$$dx = \frac{dz}{e^x}$$

$$\Rightarrow \int z \cdot \sin(z)\, dx$$

$$\Rightarrow \int z \cdot \sin(z)\, \frac{dz}{\underbrace{e^x}_{=z}} = \int \frac{\cancel{z} \cdot \sin(z)\, dz}{\cancel{z}} = \int \sin(z)\, dz = -\cos(z) + C$$

$\Rightarrow$ rücksubst. $\Rightarrow \underline{\underline{-\cos(e^x) + c}}$

also bei unbestimmten Integralen

1) Konstante
2) Rücksubstitution

Substitution

$$\int_1^{e^{\pi}} \frac{\sin(\ln(x))}{x}\,dx \qquad \boxed{z = \ln(x)}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{x} \Rightarrow dx = x \cdot dz$$

$$\Rightarrow \int_1^{e^{\pi}} \frac{\sin(z)}{x}\,dx \Rightarrow \int_{x_1 = 1}^{x_2 = e^{\pi}} \frac{\sin(z)\cdot \cancel{x}\cdot dz}{\cancel{x}}$$

$$z_1 = \ln(x_1) = \ln(1) = 0$$

$$z_2 = \ln(x_2) = \ln(e^{\pi}) = \pi$$

$$\Rightarrow \int_{z_1 = 0}^{z_2 = \pi} \sin(z)\,dz = -\cos(z)\Big]_0^{\pi} = \underbrace{\left(-\cos(\pi)\right)}_{+1} - \underbrace{\left(-\cos(0)\right)}_{+1} = \underline{\underline{2 \text{ F.E.}}}$$

Bestimmen Sie den Grenzwert von

$$g = \lim_{x \to 0} \frac{\overset{u}{x} \cdot \overset{v}{\sin(x)}}{x^2 + \sinh^2(3x)} \longrightarrow \frac{0}{0} \ ↯ \Longrightarrow H.$$

$$= \frac{\sin(x) + x \cdot \cos(x)}{2x + 2 \cdot \sinh(3x) \cdot \cosh(3x) \cdot 3} = \frac{\sin(x) + \overset{u}{x} \cdot \overset{v}{\cos(x)}}{2x + 6 \cdot \underset{u}{\sinh(3x)} \cdot \underset{v}{\cosh(3x)}} \overset{x=0}{\Longrightarrow} \frac{0}{0+0} \ ↯$$

H II. $\Longrightarrow \dfrac{\cos(x) + \cos(x) + x(-\sin(x))}{2 + 6\Big(\underbrace{\cosh(3x) \cdot 3}_{1} \cdot \underbrace{\cosh(3x)}_{1} + \underbrace{\sinh(3x) \cdot \sinh(3x) \cdot 3}_{0}\Big)}$

$$x \to 0 \quad \frac{1 + 1 + 0}{2 + 18} = \frac{2}{20} = \frac{1}{10} = \underline{\underline{0{,}1}}$$

$$\lim_{x\to\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x \Longrightarrow e^{\ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)^x} \Rightarrow e^{x\cdot\ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}$$

Betrachte Exponenten $x\cdot\ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right) \Longrightarrow H.$

$\frac{1}{x} = x^{-1}$ abgeleitet

$$\Longrightarrow \frac{\ln\left(\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right)}{x^{-1}} \overset{H.}{\Longrightarrow} \frac{\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}\cdot\left(-\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)\cdot\cancel{\left(-x^{-2}\right)}}{\cancel{-x^{-2}}}$$

$\Rightarrow \dfrac{-\sin\left(\frac{1}{x}\right)}{\cos\left(\frac{1}{x}\right)}$ das wäre $-\tan\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x\to\infty]{} -\tan\left(\frac{1}{\infty}\right) = -\tan(0)$

$\underline{\underline{= 0}}$ Exponent geht gegen Null

$$e^{\text{Exponent}} = e^0 = \underline{\underline{1}}$$

Berechnen Sie $\displaystyle\int_{e^{\pi/4}}^{e^{\pi/2}} \frac{\sin(\ln(x^2))}{x}\,dx$ durch Substitution

Sei $z = \ln(x^2)$

Merke: – keine Rücksubstitution – keine Konstante nötig

– aber Grenzen auch substituieren.