Tutorium Mathe f. BUC1 8.1.26

Partialbruchzerlegung: Sinn, Integrale einfacher zu berechnen. Summe von Einzelbrüchen ist leichter zu integrieren als eine rationale Funktion mit Polynomen in Zähler und Nenner.

Zum Aufwärmen: Berechnen Sie die PBZ von

$$\underbrace{\frac{x+1}{x^3+x^2-2x}}_{\text{Nullstellen suchen}} = \frac{x+1}{x\cdot\underbrace{(x^2+x-2)}_{=0}} \Rightarrow \frac{x+1}{x^3+x^2-2x} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x+2}$$

$x = 0$ ist 1. Nullstelle

$$x_{2/3} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{2}$$

$x_2 = 1$

$x_3 = -2$ $\Rightarrow$ Residuum Methode

$$\Rightarrow \frac{\text{Zähler}}{\text{Ableitung Nenner}} \Rightarrow \left.\frac{x+1}{3x^2+2x-2}\right|_{x=0} = \frac{1}{-2} = -\frac{1}{2} = A$$

$$\left.\frac{x+1}{3x^2+2x-2}\right|_{x=1} \Rightarrow \frac{1+1}{3+\cancel{2}-\cancel{2}} = \frac{2}{3} = B$$

$$\left.\frac{x+1}{3x^2+2x-2}\right|_{x=-2} \Rightarrow \frac{-2+1}{\underbrace{3(-2)^2-2\cdot 2-2}_{12-4-2}} \Rightarrow -\frac{1}{6} = C$$

$$\text{PBZ} \Rightarrow \int -\frac{1}{2x} + \int \frac{2}{3(x-1)} - \frac{1}{6(x+2)} \Rightarrow -\frac{1}{2}\ln(x) + \frac{2}{3}\ln(x-1)$$

. . . . .

Berechnen Sie die komplexe & reelle PBZ von

$$\frac{x+1}{x^3+x} = \frac{x+1}{x(x^2+1)} \to x_1 = 0$$

$$\to x^2+1 = 0 \Rightarrow x^2 = -1 \Rightarrow x = \pm j$$

$$\Rightarrow \frac{A}{x} + \frac{B}{x+j} + \frac{B^*}{x-j} \Rightarrow \text{Zuhaltemethode}$$

$$\left.\frac{x+1}{(x+j)(x-j)\cdot \cancel{x}}\right|_{x=0} \Rightarrow \frac{1}{j\cdot(-j)} = 1 = \underline{\underline{A}} \Rightarrow \frac{1}{x} \text{ PBZ}_1$$

$$\Rightarrow \left.\frac{x+1}{\cancel{(x+j)}(x-j)\cdot x}\right|_{x=-j} \Rightarrow \frac{-j+1}{(-j-j)(-j)} = \frac{-j+1}{(-2j)(-j)} = \frac{1-j}{-2}$$

$$\Rightarrow \underline{\underline{B = -\frac{1}{2} + \frac{j}{2}}}$$

$$\Rightarrow B^* = -\frac{1}{2} - \frac{j}{2} \Rightarrow \text{PBZ} \Rightarrow \frac{1}{x} \underbrace{- \frac{(1-j)}{2(x+j)} - \frac{1}{2} \cdot \frac{(1+j)}{(x-j)}}_{\text{für reelle}}$$

$\Rightarrow$ reelle PBZ

Hauptnenner u.s.w. $\Rightarrow \dfrac{-(1-j)(x-j)}{2(x+j)\cdot(x-j)} - \dfrac{(1+j)(x+j)}{2(x-j)(x+j)}$

$$\Rightarrow -\frac{x-j-jx-1}{2(x^2+1)} - \frac{x+j+jx-1}{2(x^2+1)} \Rightarrow \frac{-x+j+jx+1-x-j-jx+1}{2(x^2+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{-2x+2}{2(x^2+1)} = \frac{-x+1}{x^2+1} \Rightarrow \text{PBZ}: \underline{\underline{\frac{1}{x} + \frac{-x+1}{x^2+1}}} \quad \hat{=}\ \underline{Bx + C}$$

PBZ reell von

$$\frac{2x+1}{x^3-x^2+x-1} \Longrightarrow x_1 = 1 \Longrightarrow x^2+1 = 0$$

Pol. Div.

$$\Longrightarrow \frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Rightarrow A \text{ mit Zuhalten}$$

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{\cancel{(x-1)}(x^2+1)}\Bigg|_{x=1} \Rightarrow \frac{3}{2} = A \Longrightarrow \text{Hauptnenner}$$

$$\Longrightarrow \frac{(x-1)(Bx+C) + \frac{3}{2}(x^2+1)}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{2x+1}{(x-1)(x^2+1)}$$

$$Bx^2 + Cx - Bx - C + \frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2} = 2x+1$$

$$x^2\left(B + \frac{3}{2}\right) + x\left(C - B\right) - C + \frac{3}{2}$$

NIt $(x^2+1) = \pm j$

$B + \frac{3}{2} = 0$ $\qquad$ $C - B = 2$

$\Longrightarrow B = -\frac{3}{2}$ $\qquad$ $C = 2 + B \Rightarrow C = \frac{1}{2}$

$$\Longrightarrow PBZ_{reell} = \frac{\frac{3}{2}}{x-1} + \frac{-\frac{3}{2}x + \frac{1}{2}}{(x^2+1)}$$

Komplexe PBZ

$$\Longrightarrow \frac{A}{(x-j)} + \frac{B \mathrel{\hat{=}} A^*}{(x+j)} + \frac{C}{(x-1)}$$

$$\Longrightarrow C = \frac{3}{2}$$

für $\Big|_{x=j} \Rightarrow \dfrac{2j+1}{-3-2j+1} = \dfrac{(2j+1)(-2+2j)}{(-2-2j)\cdot(-2+2j)}$

$$= \frac{-4j-4-2+2j}{4+4} = \frac{-6-2j}{8} = -\frac{3}{4} - \frac{j}{4} = A$$

$$\Rightarrow B = A^* = \underline{\underline{-\frac{3}{4} + \frac{j}{4}}} \Rightarrow \text{PBZ}_{\text{komplex}}$$

PBZ

$$\frac{4x^2+x-9}{x^3-2x^2-x+2} \Rightarrow x_1 = 1 \quad x_2 = -1 \quad x_3 = 2$$

$$\Rightarrow \text{Residuummethode} \Rightarrow \frac{4x^2+x-9}{3x^2-4x-1}\Bigg|_{x=1} \Rightarrow x=-1 \quad x=2$$

$$\Rightarrow \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{x-2}$$

$$x = 1 \Rightarrow \frac{4+1-9}{3-4-1} = \frac{-4}{-2} = \underline{\underline{2 = A}}$$

$$x = -1 \Rightarrow \frac{4-1-9}{3+4-1} = \frac{-6}{6} = -1 = B$$

$$x = 2 \Rightarrow C = 3$$

$$\Rightarrow \text{PBZ}: \underline{\underline{\frac{2}{x-1} - \frac{1}{x+1} + \frac{3}{x-2}}}$$