Tutorium Mathe f. BMC 22.1.26

Prüfungsvorbereitung

$$\lim_{x \to \infty} x \cdot \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) \xrightarrow{\text{einsetzen}} \infty \cdot \ln\left(\frac{\infty}{\infty}\right) \quad ↯$$

Hosp. $\longrightarrow$

$$\frac{\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)}{x^{-1}} \to \frac{\frac{1}{\left(\frac{x+1}{x-1}\right)} \cdot \frac{1\cdot(x-1) - (x+1)\cdot 1}{(x-1)^2}}{-1 \cdot x^{-2}} \qquad \left(\frac{u'v - uv'}{v^2}\right) = \text{Q.R.}$$

aufräumen $\longrightarrow$

$$\frac{\frac{\cancel{(x-1)} \cdot (-2)}{(x+1)\cdot(x-1)^{\cancel{2}}}}{-x^{-2}} \to \frac{\frac{-2}{(x+1)(x-1)}}{-x^{-2}} \to \frac{\frac{-2}{x^2-1}}{-x^{-2}}$$

$$\Longrightarrow \frac{-2 \cdot (-x^2)}{(x^2-1)} = \frac{2x^2}{x^2-1} = \frac{\cancel{x^2} \cdot 2}{\cancel{x^2}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)} = 2$$

$\lim_{x \to \infty} = 0$

$$A(s) = \begin{pmatrix} s & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

a) charakt. Polynom angeben

b) Zeigen, daß $A(s)$ stets 2 reelle Eigenwerte hat.

a) $\begin{pmatrix} s-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} \Rightarrow (s-\lambda)(1-\lambda) - 1 = s - s\lambda - \lambda + \lambda^2 - 1$

$\oplus$ $\ominus$

$$\lambda^2 - s\lambda - \lambda + s - 1 = 0$$

b) $\Rightarrow \underset{a}{1} \cdot \lambda^2 - \underbrace{(s+1)}_{b} \cdot \lambda + \underbrace{(s-1)}_{c} \Rightarrow \lambda_{1/2} = \dfrac{(s+1) \pm \sqrt{\left(-(s+1)\right)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (s-1)}}{2}$

$$\lambda_{1/2} = \frac{s+1 \pm \sqrt{s^2 - 2s + 5}}{2}$$

Ausdruck unter der Wurzel nicht nochmal nach s_1 s_2 auflösen (keine Nullstellen suchen.)

Zu zeigen: $\underline{\underline{s^2 - 2s + 5 > 0}}$!!

quod erat demonstrandum

Wo hat $f(s)$ seinen Extremwert

$f(s)' = 0 \Rightarrow 2s - 2 = 0$ $\quad \underline{\underline{s=1}}$ ist Extremwert

$f(s)'' = 2 > 0 \Rightarrow$ Min. $\quad f(1) = 4$ (Einsetzen)

Minimalwert für $s^2 - 2s + 5 = 4$ $(s = 1)$ immer $> 0 \Rightarrow$ q.e.d.

$\forall s \in \mathbb{R}$

gegeben sind der reelle Parameter a sowie das lineare Gl. Syst.

$$\begin{aligned} a \cdot x_2 + x_4 &= 1 \\ 2x_1 + x_3 &= 1 \\ x_2 + 2x_4 &= 2 \\ x_1 + 2x_3 &= -1 \end{aligned} \Longrightarrow \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \vec{b} \\ 0 & a & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -2\,IV \\ \\ \\ \end{array}$$

a) schreiben Sie das LGS in Matrixform und der Inhomogenität $\vec{b}$

b) DET A

Laplace - Entwicklungssatz

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & a & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \end{array}\right)$$

$i = 2$

$j = 3$

$$(-1)^{i+j} \cdot (-3) \cdot \begin{vmatrix} 0 & a & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \underbrace{(-1)^5 \cdot (-3)}_{+3} \cdot \begin{array}{ccc|cc} 0 & a & 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} = \underline{\underline{3 \cdot (2a - 1)}}$$

für welche a ist LGS eindeutig lösbar ($DET \neq 0$)

Prüfe $2a - 1 = 0 \Rightarrow 2a = 1$; $a = \frac{1}{2} \Rightarrow$ Lösbar $\Leftrightarrow a \in \mathbb{R} \setminus \frac{1}{2}$

ohne

$$A(s) = \begin{pmatrix} 1 & s & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & s & 2 \\ 0 & 4 & 4 & s \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \\ -4\cdot II \end{matrix} \Longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & s & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & s & 2 \\ 0 & 0 & 0 & s-4 \end{pmatrix}$$

$i+j$
$= 4+4 = 8$

$\det A(s)$

$$\underbrace{(-1)^8}_{+1} \cdot (s-4) \cdot \begin{vmatrix} 1 & s & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & s \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & s \\ 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{matrix}$$

$1\cdot 1\cdot s - 1\cdot 1\cdot 3 + s - 4$

$s - 3 + s - 4$

$$\text{Det} = (2s-7)\cdot(s-4)$$

$$= 2s^2 - 8s - 7s + 28$$

$$= 2s^2 - 15s + 28 = 0$$

wann nicht invertierbar? $\text{DET} = 0$

$$s_{1/2} = \frac{15 \pm \sqrt{225 - \underbrace{4\cdot 8\cdot 28}_{224}}}{4} = \frac{15 \pm 1}{4} \begin{matrix} \nearrow 4 \\ \searrow \frac{7}{2} \end{matrix}$$

Für welchen Wert des Parameters u ist $B(u)$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & u & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

die Inverse zu $A(3)$?

mit $A(3) \cdot \underbrace{A^{-1}}_{B(u)} = E$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 2 \\ 0 & 4 & 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & -1 \\ -1 & -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & u & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$1 - 9 + 2u = 0$

$2u = 8$

mit $\underline{u = 4}$

$=$ inverse