Tutorium Math. BMC 17.6.26

Eigenwerte, Eigenraum, LGS, Gauß-Verfahren

Berechnen Sie die Eigenwerte + Eigenvektoren von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1-\lambda & 0 \\ -2 & -1-\lambda \end{pmatrix} \xRightarrow{\text{DET}} \qquad \underline{\underline{A \cdot \vec{v} = \lambda \cdot \vec{v}}}$$

$$\Rightarrow (1-\lambda)\cdot(-1-\lambda) - \cancel{(0\cdot(-2))} = -1 \cancel{-\lambda} \cancel{+\lambda} + \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 - 1 = 0$$

$$\lambda^2 = 1 \Rightarrow \underline{\underline{\lambda = \pm 1}}$$

$$EV_{+1}: \begin{pmatrix} 1-1 & 0 \\ -2 & -1-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} 0\cdot x_1 + 0 \cdot x_2 = 0 \\ -2\cdot x_1 - 2\cdot x_2 = 0 \end{array} \Rightarrow -2x_1 = 2\cdot x_2 \Rightarrow -x_1 = x_2 \text{ oder } x_1 = -x_2$$

mit $x_2 = -x_1 \Rightarrow EV_{+1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix} (x_2)$

$\Rightarrow EV_{+1}: \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}, \ldots \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \end{pmatrix}$

$\underline{\infty\text{-viele}}$ ... $\Rightarrow$ Eigenraum $= \infty$ viele EV

$\hat{=}$ Menge aller EV zu einem Eigenwert

$EV_{-1}: \begin{pmatrix} 1--1 & 0 \\ -2 & -1--1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$2x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$

$= -2x_1 + 0 \cdot x_2 = 0$

$\Rightarrow 2x_1 = 0 \quad \underline{x_1 = 0}$

x_2 beliebig

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} \ldots$ ∞ viele

Eigenwerte & Eigenvektoren berechnen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \left(\begin{matrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ -1 & -1-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & -\lambda \end{matrix}\right) \begin{matrix} 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1-\lambda \\ 1 & 1 \end{matrix}$$

Sarrus

$$\Rightarrow (1-\lambda)(-1-\lambda)(-\lambda) - \lambda + (-1) - (-1-\lambda) = 0$$

$$(-1 \cancel{-\lambda} \cancel{+\lambda} + \lambda^2)(-\lambda) \cancel{-\lambda} \cancel{-1} \cancel{+1} \cancel{+\lambda} = 0$$

$$\lambda - \lambda^3 = 0 \Longrightarrow \lambda \cdot (1-\lambda^2) = 0 \rightarrow \text{entweder } \underline{\underline{\lambda = 0}}$$

$$\text{oder } 1 - \lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda^2 = 1$$

$$\underline{\underline{\lambda = \pm 1}}$$

$$\underline{\underline{\lambda_1 = 0}} \quad \underline{\underline{\lambda_2 = 1}} \quad \underline{\underline{\lambda_3 = -1}}$$

$$EV_0 \quad \begin{pmatrix} 1-0 & 1 & 1 \\ -1 & -1-0 & 0 \\ 1 & 1 & 0-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Willkür

setze $\boxed{x_1 = x_1}$

I. $1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 1 \cdot x_3 = 0$

II. $-1 \cdot x_1 - 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0$

III. $1 \cdot x_1 + 1 \cdot x_2 + 0 \cdot x_3 = 0 \Longrightarrow x_1 + x_2 = 0 \Longrightarrow \boxed{x_2 = -x_1}$

damit in I. $\Longrightarrow \cancel{x_1} \cancel{(-x_1)} + x_3 = 0 \Longrightarrow \boxed{x_3 = 0}$

$$\Longrightarrow EV_0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{viele}]{\infty} \text{z.B.} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ oder } \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \ldots \begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \ldots \quad \text{oder } \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

triviale „Lösung"

EV_1 $\begin{pmatrix} 1-1 & 1 & 1 \\ -1 & -1-1 & 0 \\ 1 & 1 & 0-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\text{I.} \quad \cancel{0 x_1} + x_2 + x_3 = 0$

$\text{II.} \quad -x_1 - 2x_2 + \cancel{0 x_3} = 0 \implies \boxed{x_2 = -\frac{x_1}{2}}$ $\qquad \boxed{x_1 = x_1}$ lege ich fest

$\text{III.} \quad x_1 + x_2 - x_3 = 0$

aus III.: $x_1 \left(-\frac{x_1}{2}\right) - x_3 = 0 \implies \frac{x_1}{2} - x_3 = 0 \implies \boxed{x_3 = \frac{x_1}{2}}$

EV_1 $\begin{pmatrix} x_1 \\ -\frac{x_1}{2} \\ \frac{x_1}{2} \end{pmatrix}$ z.B. $x_1 = 2 \implies \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ oder $\begin{pmatrix} 3 \\ -1{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$ ..... ∞

$$EV_{-1} \quad \begin{pmatrix} 1--1 & 1 & 1 \\ -1 & -1--1 & 0 \\ 1 & 1 & 0--1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{I.} \quad 2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$$\text{II.} \quad -x_1 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{x_1 = 0} \Rightarrow$$

$$\text{III.} \quad x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

$x_2 = x_2$ ⇒ festgelegt

$$\text{in III} \quad 0 + x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_3 \quad \text{oder} \quad x_3 = -x_2$$

$$EV_{-1} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \\ -x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} \Rightarrow \infty$$

Grenzwert ergänzen:

$$\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right) \xrightarrow{\text{Theorem}} \cot(x) = \frac{1}{\tan(x)}$$

$$\lim_{x\to 0} \sqrt{x}\,\sqrt{\tan\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \sqrt{x}\cdot\sqrt{\cot(x)} = \sqrt{x}\cdot\sqrt{\frac{1}{\tan(x)}}$$

$$= \sqrt{\frac{x}{\tan(x)}} \longrightarrow \text{Radikant betrachten}$$

$$\frac{x}{\tan(x)} \xrightarrow{\text{Hop.}} \frac{1}{\frac{1}{\cos^2(x)}} \Rightarrow \cos^2(x) \quad x \to 0 \quad \underline{\underline{= 1}}$$

$$\lim_{x\to 0} \Rightarrow \sqrt{1} \underline{\underline{= 1}}$$