Tutorium Math BMC 2 24.6.26

Sinn & Zweck der L.T.

1) DGL → alg. Gleichung → leichter zu lösen

2) Faltungsintegral zweier Zeitfunktionen $f(t_1)$ & $f(t_2)$ $\Longrightarrow$ Produkt ihrer Laplacetransformationen.

Natürlich muss rücktransformiert werden.

Beispiel: $f'''(t) \longrightarrow$ L.T. Lösung: $s^3 F(s) - s^2 \cdot f(0) - s f'(0) - f''(0)$

$\Rightarrow n = 3 \Rightarrow k = 0, 1, 2$

$$\Rightarrow s^3 \cdot F(s) - \left(s^{3-1-0} \cdot \overset{f(0)}{f^{(0)}(0)} + s^{3-1-1} \cdot \overset{f'(0)}{f^{(1)}(0)} + \underbrace{s^{3-1-2}}_{1} \cdot \underbrace{f^{(2)}(0)}_{f''(0)} \right)$$

Übung <u>Rücktrafo:</u> Geben Sie die Zeitfunktion an: $f(t)$

$$\mathcal{L} = \frac{7}{(s+4)^2+9} \qquad (\omega = 3) \quad (\delta = 4)$$

$$\Rightarrow \frac{7}{(s+4)^2+9} \cdot \frac{3}{3} \Rightarrow \frac{7}{3} \cdot \frac{3}{(s+4)^2+3^2} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{7}{3} \cdot e^{-4t} \cdot \sin(3t)}}$$

Berechnen Sie mit Laplace-Transformation:

$$y' + \overset{\hat{=}a}{2}y = \underbrace{\sin(t)}_{h(t)} \; ; \; y(0) = \pi$$

$$= e^{-2t} \cdot \int \underbrace{e^{2t} \cdot \sin(t)\, dt}_{\text{Tabelle}} + \overset{\downarrow y_0}{\pi} \cdot e^{-2t} \quad \text{(Formel)}$$

$$\frac{e^{2t}\left(2 \cdot \sin(t) - \cos(t)\right)}{5} \Rightarrow y(t) = \frac{2 \cdot \sin(t) - \cos(t)}{5} + \pi \cdot e^{-2t}$$

Probe:

$$y' = \frac{2 \cdot \cos(t) + \sin(t)}{5} - 2\pi \cdot e^{-2t}$$

$$+ \quad 2 \cdot y = \frac{4}{5} \cdot \sin(t) - \frac{2}{5} \cdot \cos(t) + 2\pi \cdot e^{-2t}$$

$$= \sin(t) \checkmark \quad \text{q.e.d.}$$

Berechnen Sie mit Laplace Tr.

$$\ddot{x} + 2\dot{x} + 5x = 0 \qquad x(0) = 10, \quad \dot{x}(0) = 0$$

$$s^2 \cdot X(s) - s \cdot \underbrace{x(0)}_{10} - \underbrace{\dot{x}(0)}_{0} + 2\left[s \cdot X(s) - \underbrace{x(0)}_{10} \right] + 5 \cdot X(s) = 0$$

$$s^2 X(s) - 10 \cdot s + 2 \cdot s \cdot X(s) - 20 + 5 X(s) = 0$$

$$\Rightarrow (s^2 + 2s + 5) \cdot X(s) = 10s + 20 = 10(s+2)$$

$$X(s) = 10 \cdot \frac{s+2}{s^2+2s+5} \longrightarrow \text{quadr. Ergänzung} \Rightarrow (s+1)^2 \underbrace{-1+5}_{4}$$

$$\underline{\underline{\omega = 2}}$$

$$= 10 \cdot \frac{s+2}{(s+1)^2+4} = 10 \, \frac{\overbrace{(s+1)}^{\delta}+1}{\underbrace{(s+1)}_{\delta}{}^2+2^2} \qquad \underline{\underline{\omega = 2}}$$

$$\Rightarrow \delta = 1$$

$$= 10 \cdot \left(\frac{s+1}{(s+1)^2+2^2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \overset{\text{(}\omega=2\text{) merke}}{1}}{(s+1)^2+2^2} \right) \quad (*)$$

$$= 10 \left(e^{-t} \cdot \cos(2t) + \frac{1}{2} e^{-t} \cdot \sin(2t) \right) \mathrel{\hat{=}} \left(\mathcal{L}^{-1} \right) \quad x(t)$$

Lösen Sie die DGL mittels Laplace:

$$y''' - 6y'' + 12y' - 8y = e^{2t} \qquad y(0) = 0; \; y'(0) = 0; \; y''(0) = 0$$

$$\mathcal{L}(f'''(t)) = s^3 \cdot F(s) - s^2 \cdot \cancel{f(0)} - s \cdot \cancel{f'(0)} - \cancel{f''(0)}$$

$$\mathcal{L}(f''(t)) = s^2 \cdot F(s) - s \cdot \cancel{f(0)} - \cancel{f'(0)}$$

$$\mathcal{L}(f'(t)) = s \cdot F(s) - \cancel{f(0)}$$

$$\mathcal{L}(e^{2t})$$

$$\Downarrow$$

$$\Rightarrow s^3 \cdot F(s) - 6s^2 \cdot F(s) + 12 s F(s) - 8F(s) = \frac{1}{s-2}$$

$$\Rightarrow F(s) = \frac{1}{(s-2)(s^3 - 6s^2 + 12s - 8)} \overset{s=2}{=} \frac{1}{(s-2) \cdot (s-2)^3}$$

$$= \frac{1}{(s-2)^4} = \frac{1}{(s-a)^n} \underset{4=3+1}{=} \rightarrow \frac{t^{n-1} \cdot e^{at}}{(n-1)!} = \frac{t^3 \cdot e^{2t}}{3!}$$