Tutorium Mathe f. BMC2 8.7.26

Ansatz der Aufgabe vom letzten Mal: $\int_1^2 y\cdot\ln y\,dy \int_0^{\frac{1}{y}} y^{xy}\,dx$

$$\ldots \Longrightarrow \int_1^2 \cancel{y}\cdot\cancel{\ln} y\,dy \left[\frac{(y^y)^{\frac{1}{y}}}{\cancel{y}\cdot\cancel{\ln} y} - \frac{(y^y)^0}{\cancel{y}\cdot\cancel{\ln} y}\right]$$

$$= \int_1^2 dy\left((y^y)^{\frac{1}{y}} - 1\right) = \int_1^2 (y-1)\,dy = \frac{1}{2}y^2 - y\Big]_1^2 = (2-2)-\left(\frac{1}{2}-1\right) = \frac{1}{2}$$

Berechnen Sie die DGL:

$y' + \frac{3y}{x} = x$ mit $y(1) = 2$

Var. der Konstanten Formel

$$y' + \frac{3}{x} \cdot y = x \qquad a(x) = \frac{3}{x} \Rightarrow A(x) = 3 \cdot \ln(x)$$

$$g(x) = x$$

$$e^{A(x)} = e^{\ln(x^3)} = x^3$$

$$e^{-A(x)} = \frac{1}{x^3} \qquad \Rightarrow y(x) = \left(K + \int x^3 \cdot x \, dx\right) \cdot \frac{1}{x^3}$$

Erst Integral

$$= \left(K + \frac{1}{5} x^5\right) \cdot \frac{1}{x^3} = \frac{K}{x^3} + \frac{1}{5} x^2$$

mit Anfangbedingung $y(1) = 2$

$$\Rightarrow \frac{K}{1} + \frac{1}{5} = 2 \Rightarrow K = \frac{9}{5} \Rightarrow y(x) = \frac{9}{5x^3} + \frac{1}{5} x^2$$

Im Laplace: $s \cdot F(s) - f(0) + \frac{3}{x} \cdot F(s) = x$ geht so nicht!

$$\boxed{\dot{N}(t) + \lambda \cdot N(t) = 0}$$

Berechnung mit und ohne Laplace

$\frac{dN}{dt}$

1. T.d.V. $\frac{dN}{dt} = -\lambda \cdot N \Rightarrow \frac{1}{N} dN = -\lambda\, dt \quad \Big/ \int$

$$\ln N \Big|_{N_0}^{N} = -\lambda \cdot t = \ln N - \ln N_0 = -\lambda \cdot t \qquad \boxed{N(0) = 0}$$

$$= \ln \frac{N}{N_0} = -\lambda \cdot t \quad \Big| e^{\sim} \Rightarrow \frac{N}{N_0} = e^{-\lambda \cdot t}$$

$$\boxed{N(t) = N_0 \cdot e^{-\lambda \cdot t}}$$

2. mit Laplace:

$$\Rightarrow Y(s)(s+\lambda) = N_0 \Rightarrow Y(s) = \frac{N_0}{s+\lambda}$$

Berechnen Sie mittels Laplace (Formel)

$$y'' + 3y' + 2y = 4t + 4 \quad ; \quad y(0) = 0 \quad y'(0) = 1$$

$$Y(p) = \frac{1}{p^2+3p+2}\left(\frac{4}{p^2} + \frac{4}{p}\right) + 0 + \frac{1}{p^2+3p+2} \qquad p^2+3p+2 \rightarrow (p+1)(p+2)$$

$$= \frac{1}{p^2+3p+2} \cdot \left(\frac{4+4p}{p^2}\right) + \frac{1}{p^2+3p+2}$$

$$= \frac{p^2+4p+4}{p^2\left(p^2+3p+2\right)} = \frac{p^2+4p+4}{p^2(p+1)(p+2)} = \frac{(p+2)^{\cancel{2}}}{p^2(p+1)\cancel{(p+2)}}$$

$$= \frac{p+2}{\cancel{p^2}\,(\cancel{p+1})} = \frac{A}{p^2} + \frac{B}{p} + \frac{C}{p+1}$$

doppelte NST. $\underline{= 0}$

einf. $\underline{= -1}$

$$= \frac{0+2}{0+1} = \underline{\underline{2 = A}}$$

$$\varphi_{(-1)} \Rightarrow \frac{-1+2}{1} = \underline{\underline{1 = C}}$$

für B wähle geeignetes p

z.B. $\underline{\underline{p = 1}}$

damit $\frac{1+2}{1 \cdot 2} = \frac{2}{1} + \frac{B}{1} + \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{B = -1}}$

damit $Y(p) = \frac{2}{p^2} - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+1} \Rightarrow \mathcal{L}^{-1}(Y(p)) \Rightarrow$

$$\Rightarrow f(t) = 2t - 1 + e^{-t}$$

$$y' = \frac{x y^2}{1+x^2} \qquad y(0) = 1$$ zu lösen

$$\Rightarrow \frac{1}{y^2}\, dy = \frac{x}{1+x^2}\, dx \quad \int \quad \Rightarrow -\frac{1}{y} = \frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c$$

$$y = \frac{-1}{\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) + c}$$

mit Anfangsbed. $1 = \frac{-1}{c}$ $\quad c = -1$

$$y(x) = \frac{-1}{\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right) - 1}$$

$$y'' + y = x^2 + 1 \quad (\text{recht. Seite})$$

$$y_h = \lambda^2 + 1 = 0 \Rightarrow \underline{\lambda = \pm i} \quad (\underline{\sin x,\ \cos x\ \ldots}) -$$

Ansatz f. y_p $(b \neq 0)$ $\Rightarrow$

$$y = Ax^2 + Bx + C$$
$$y' = 2Ax + B$$
$$y'' = 2A$$

$$\Rightarrow 2A + \underset{\sim}{A}x^2 + \cancel{B}x + C = 1 \cdot x^2 + 1 \Rightarrow 2A + C = 1$$

$\underline{A = 1}$ x kommt nicht vor $\Rightarrow \underline{B = 0}$ $\Rightarrow \underline{\underline{C = -1}}$

$$\Rightarrow \underline{\underline{y_p = x^2 - 1}} \quad \rightarrow y = y_h + y_p$$